

ДВАДЕСЕТ И ПЪРВА
УЧЕНИЧЕСКА СЕКЦИЯ УС'21

Покритие на полуравнината с
L полимина

Ангел Иванов Райчев
125 СУ „Боян Пенев“, XI клас, София

Научен ръководител:
Димитър Димитров
учител по математика, 125 СУ „Боян Пенев“

Съдържание

1	Увод	3
2	Основни резултати	3
2.1	Достатъчно условие	3
2.2	Необходимо условие	4
3	Заклучение и бъдещо развитие	13
4	Благодарности	14

Абстракт

В този реферат разглеждаме L полимина. Това са полимина във формата на буквата L и с дебелина от едно квадратче. Ако n и m са броят квадратчета по дължината и ширината на полиминото, ще казваме, че то е с размери $n \times m$. Интересуваме се от това кои L полимина могат да покрият полуравнината без застъпване и без оставяне на празни места.

1 Увод

Мотивация за този реферат са резултатите ни от предишния реферат [1], представен на УК'21. Там доказахме, че квадрант от равнината не може да се покрие с L полимина с размери $n \times m$, когато $n, m \geq 3$. От друга страна, доказахме, че равнината може да се покрие с всички видове L полимина. Остана да разгледаме какво се случва по средата, а именно при полуравнината. В този реферат правим точно това.

2 Основни резултати

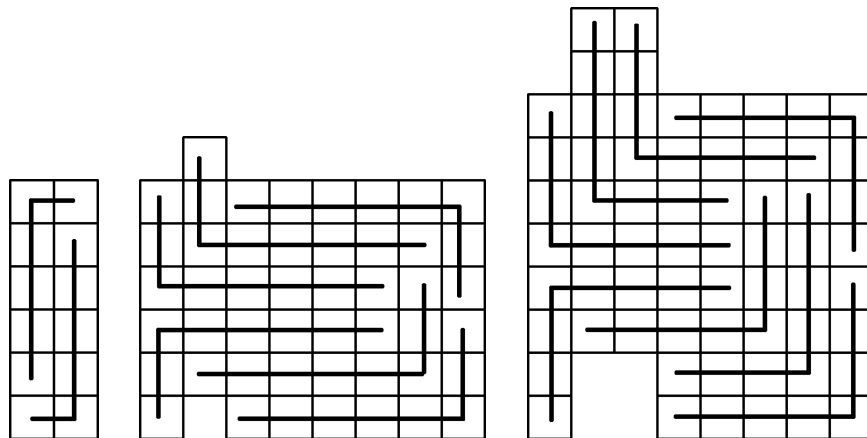
Централният резултат на представената разработка е доказателството на следната теорема:

Теорема 1. *Единствените L полимина, с които може да се покрие полуравнина, са тези с размери $2 \times n$, $3 \times n$ и 4×5 .*

Докателството се състои от две части – проверка за необходимост и достатъчност на условията. Първата част е по-лесна и директна, докато най-трудният момент в доказателството на втората част е отхвърлянето на случая 4×6 .

2.1 Достатъчно условие

В тази секция ще покажем как може да се покрие полуравнината с изброените по-горе полимина.



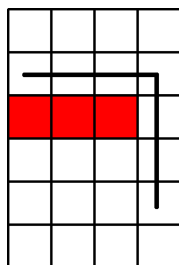
На първата картинка виждаме как с полимина с размери $2 \times n$ може да се покрие правоъгълник, откъдето става ясно, че може да се покрие и полуравнина. На следващите две картинки разглеждаме полимина с размери $3 \times n$ и 4×5 . Виждаме, че при поставянето на много копия на получените форми едно върху друго, можем да запълним безкрайна лента отрязък от равнината. В единия случай лентата е с ширина $n + 2$, а в другия – с ширина 6. Независимо от ширината на лентата е ясно, че при поставяне на много такива ленти една до друга, може да се покрие полуравнината.

2.2 Необходимо условие

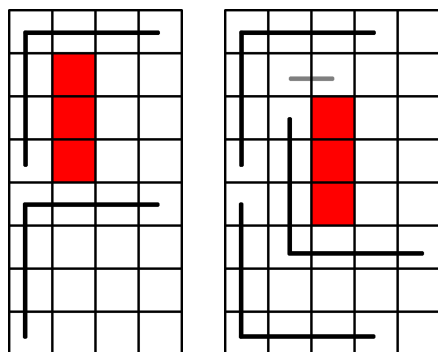
Сега ни предстои по-сложната част, а именно да докажем, че някои други L полимина не покриват полуравнината. Да допуснем обратното, тоест съществува някой друг вид полимина, с който може да се покрие полуравнината. Ще започнем с доказването на една лесна лема.

Лема 2. L полимината с размери $n \times n$, при $n \geq 4$, не могат да покрият полуравнината.

Доказателство. Разглеждаме как може да се покрият квадратчетата по края на полуравнината. С червено сме отбелязали квадратчета, които не могат да бъдат покрити. Първо проверяваме дали е възможно да съществува полимино, покриващо само една клетка от ръба на полуравнината.



От това, че е невъзможно, следва, че полимината, покриващи крайни клетки, са разположени плътно към края на полуравнината. Остава да разгледаме още два случая за различните положения на полимината. Със сива чертичка отбелязваме полимино, за което знаем, че покрива определени квадратчета, но не знаем точно къде се намира.



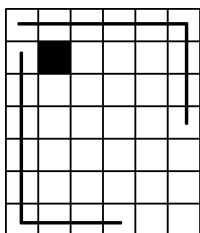
И в двата случая стигнахме до противоречие по подобен начин, с което доказахме твърдението. $\square$

Вече знаем, че $n \neq m$ и нека $n > m$. От преди знаем, че $m \geq 4$, а след доказването на горната лема може да заключим, че $n \geq 6$.

Преди да преминем към основната част, да разгледаме някои специфични случаи, при които бързо се стига до противоречие. Щом една клетка е оцветена, значи разглеждаме как тя може да бъде покрита. Ако дадена клетка е оцветена, но не е покрита, означава, че тя не може да бъде покрита. Реда на цветовете при проверяване на клетките е следният:



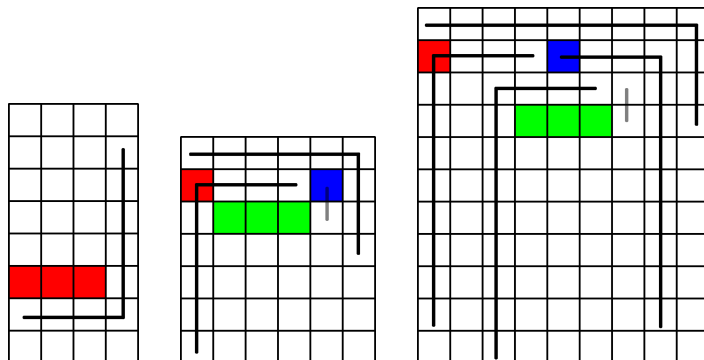
Сега да преминем към специфичните случаи. Първата ситуация е много проста и се оказва, че клетката в черно няма как да бъде покрита.



В следващите картинки проверяваме дали може да съществува полимино, покриващо само една от клетките по ръба (клетките в първата колона).

Лема 3. При $m \geq 4$ не съществува полимино, покриващо само една от клетките по ръба.

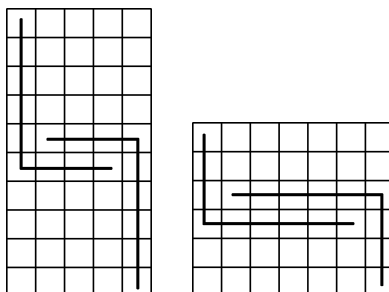
Доказателство. В първата картинка проверяваме случая, когато полиминото докосва ръба с късата си страна, докато във втората и третата, когато го докосва с дългата.



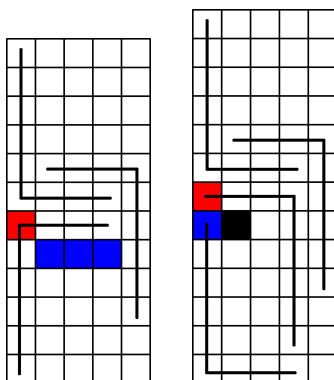
□

Сега знаейки, че полимината са разположени плътно към ръба, ще започнем да отхвърляме възможните случаи.

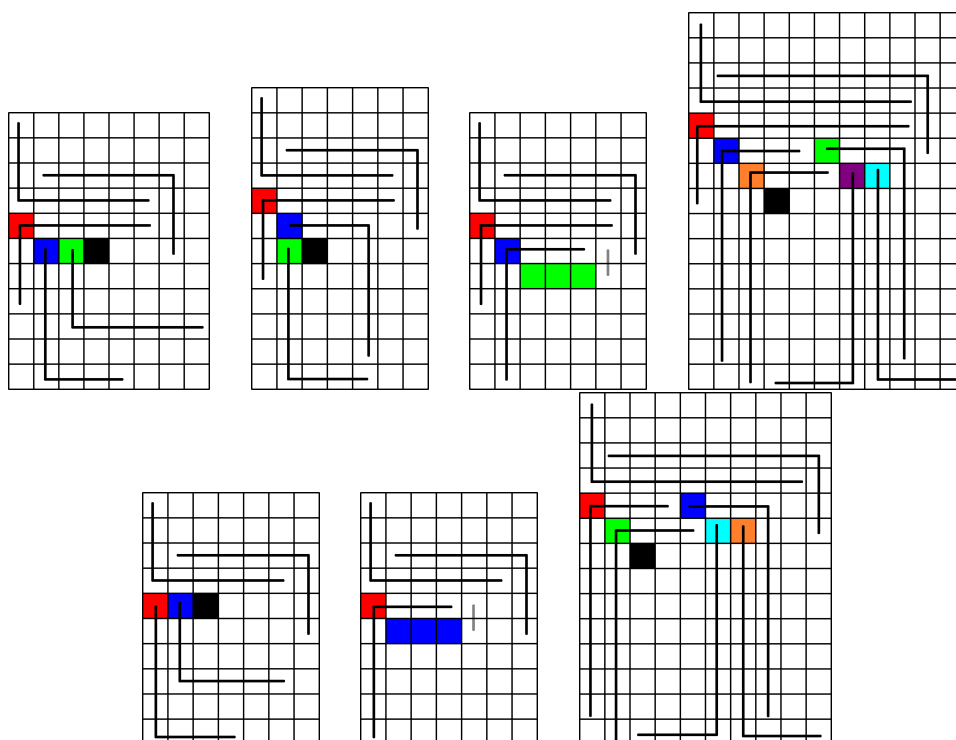
Лема 4. При $n \geq 6$ и $m \geq 4$ следните две ситуации са невъзможни.



Доказателство. При първата ситуация лесно се достига до противоречие:



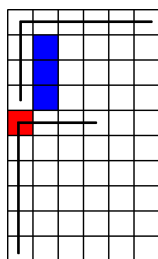
Втората е доста по-технична, но и там се стига до противоречие:



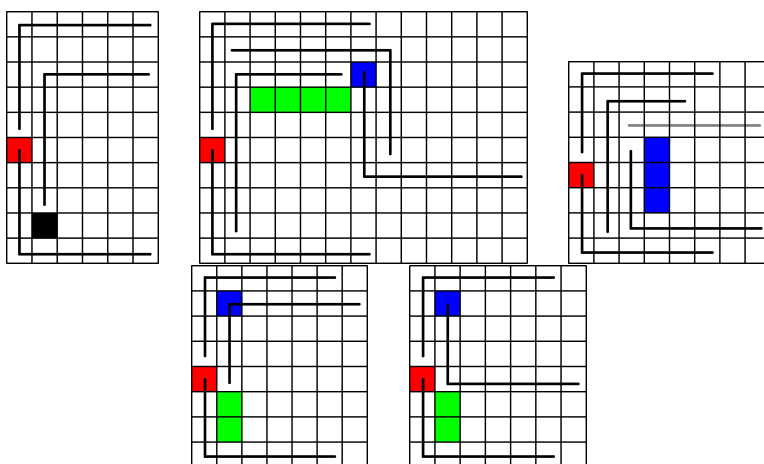
□

Лема 5. При $n \geq 6$ и $m \geq 4$ не е възможно някое полимино да е прилепено към ръба с късата си страна.

Доказателство. Разглеждаме различните варианти за покриване на червеното квадратче. Първият случай е разгледан на следната картинка.

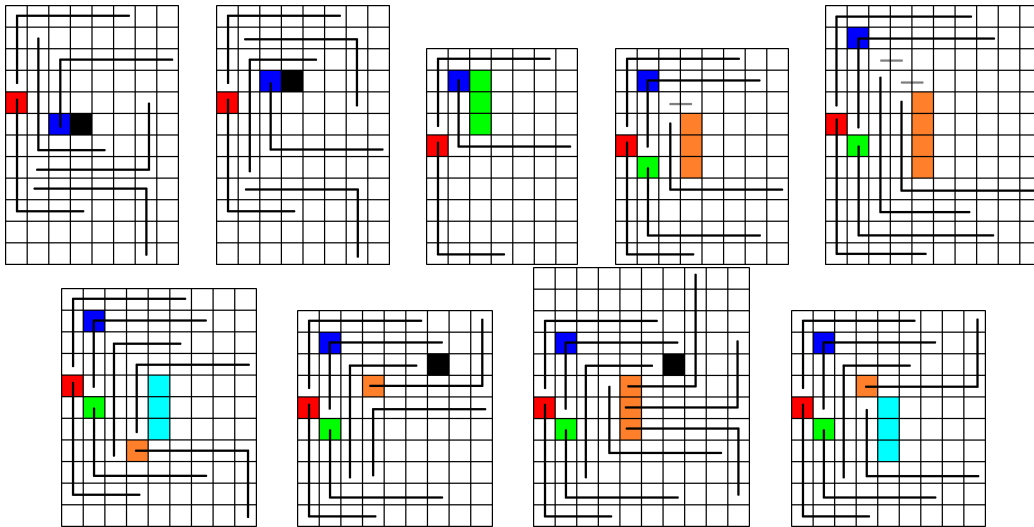


На картинките по-долу разглеждаме втория случай за покритието на червената клетка. На горните три картинки разглеждаме случая, когато клетките във втората колона (говорим само за клетките заключени от полимината, които са допират до ръба), са покрити от дългата страна на някое полимино, докато в долните две – когато са покрити от късата страна на някое полимино.



В следващия вариант за покритие на червеното квадратче отново разделяме случаите на две в зависимост от това как са покрити квадратчетата във втората колона (дали са покрити от една дълга страна или от няколко къси страни). Същото правим и за квадратчетата в третата колона.

На последната картинка на първия ред, ако оранжевите квадратчета са повече от 3, директно стигаме до противоречие. Ако са 3, тоест $m = 4$, използваме неравенството получено между втората и третата колона и получаваме: $2m \geq n + 2 \Rightarrow n \leq 6$. Но ние знаем, че $n \geq 6$, тоест $n = 6$. В картинките на втория ред проверяваме специално случая $m = 4$ и $n = 6$.

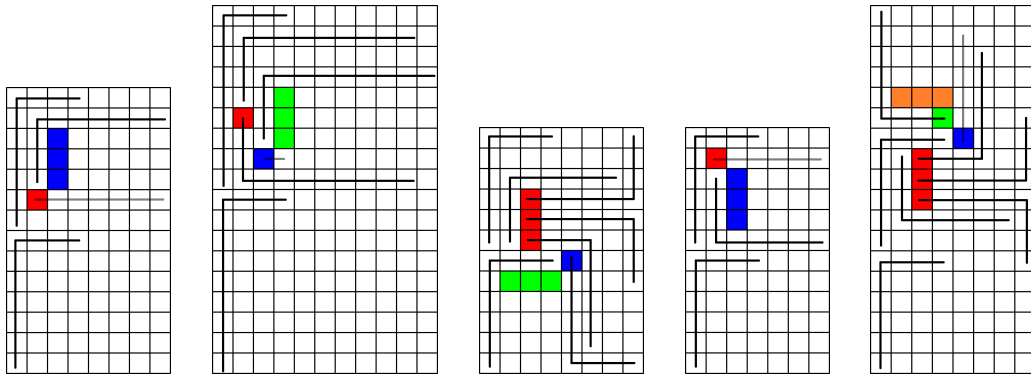


□

С отхвърлянето на всички варианти за покритието на червената клетка доказахме, че полимината, покриващи ръба (клетките в първата колона), го покриват с дългата си страна.

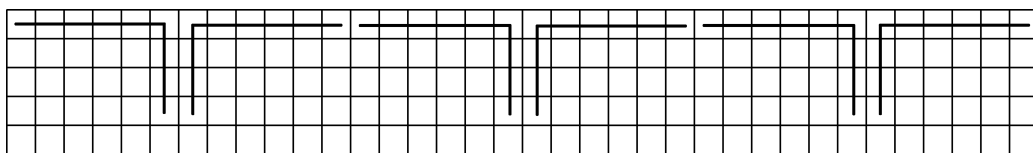
Лема 6. Не е възможно да има две съседни полимина, покриващи клетки от ръба с дългата си страна и имащи еднаква ориентация

Доказателство.



□

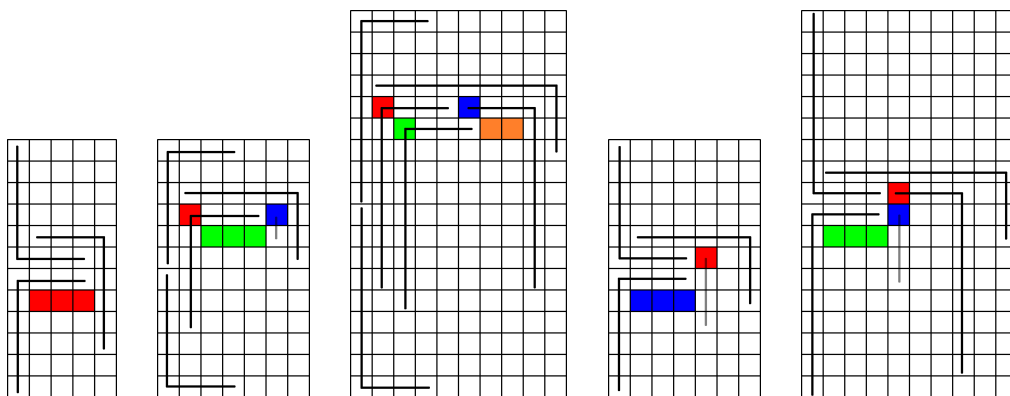
След като отхвърлихме и този случай, получаваме, че полимината, покриващи ръба, са разположени по следния начин:



Ще докажем няколко важни твърдения за горната ситуация.

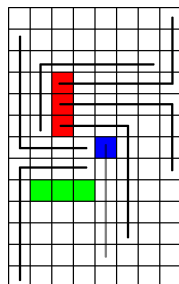
Лема 7. Не е възможно някое полимино (освен вече поставените) да покрива само едно от квадратчетата във втората колона (втория ред на картинката по-горе).

Доказателство.

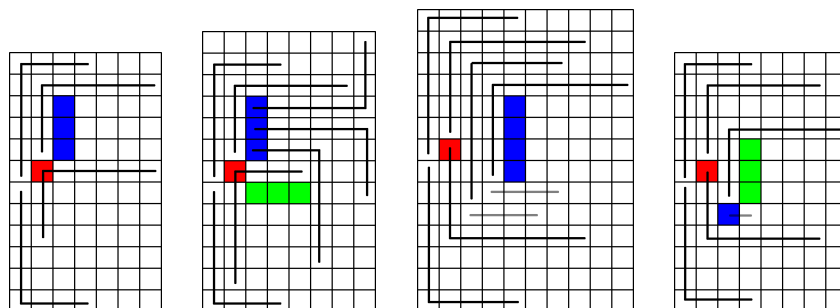


□

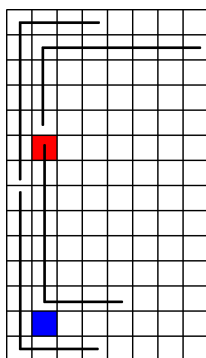
Установихме, че всички полимина, покриващи втората колона, я покриват с късата или с дългата страна. Оттук получаваме уравнението $am + bn = 2n - 2$. Вижда се, че $a \geq 1$ и $b \leq 1$. Нека разгледаме как е разположено някое полимино, което покрива клетки от втората колона с късата си страна и се допира до късата страна на някое от вече разположените полимина.



Както се вижда, това полимино не може да е разположено по този начин, тоест трябва да е завъртяно на другата страна. Сега ще разгледаме как може да са покрити другите клетки във втората колона.



След проверяването на горните случаи заключаваме, че червеното квадратче може да бъде покрито само по следния начин:

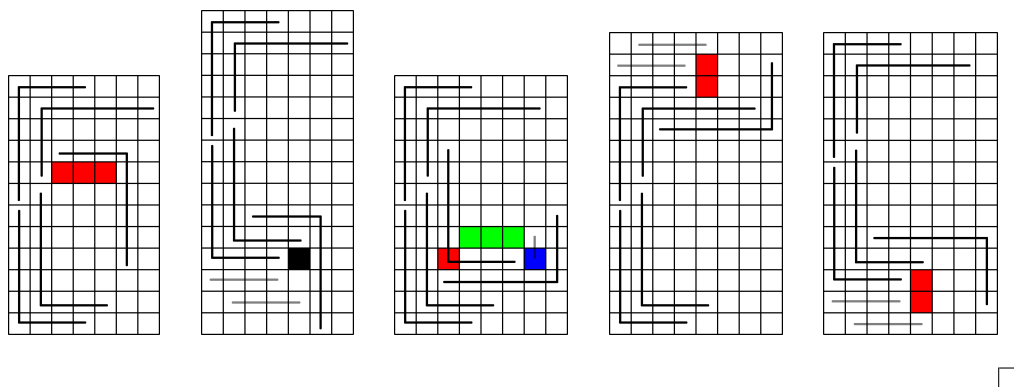


Анализираме горната картинка. Възможно ли е синята зона да съществува, тоест дали има още полимина, покриващи клетки от втората колона. Ясно е, че ако има такива полимина, то те ще са прилепени с късата си страна. Следователно ще има поне още едно полимино, покриващо сините клетки с късата си страна и допиращо се до късата страна на някое от полимината, покриващи клетки от първата колона. Но това е невъзможно, защото в такъв случай ще имаме поне едно полимино, покриващо сините клетки с дългата си страна. Тоест в синята зона няма клетки, откъдето получаваме $2n - 2 = n + m \Rightarrow n = m + 2$.

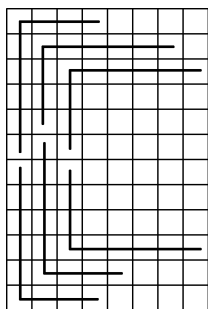
Сега ще анализираме как са покрити квадратчетата в третата колона.

Лема 8. Не е възможно някое полимино (освен вече поставените) да покрива само едно от квадратчетата от третата колона.

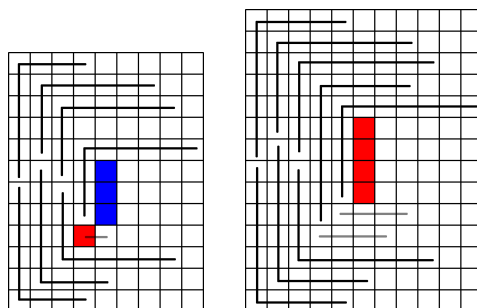
Доказателство.



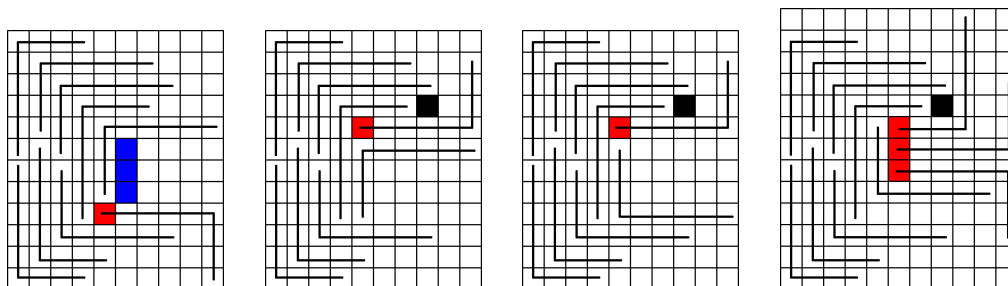
Установихме, че всички полимина, покриващи третата колона, я покриват с късата или с дългата страна. Оттук получаваме уравнението $am + bn = n + m - 2 \Rightarrow am + b(m + 2) = 2m \Rightarrow a = 2$ и $b = 0$. Оттук следва, че двете полимина, покриващи третата колона с късата си страна, са разположени така:



Сега ни остава да отхвърлим само още няколко случая, за да се убедим в исканото.



Ако червените квадратчета на втората картинка са повече от 3, стигаме до противоречие. Остава само да проверим случая, когато са 3, тоест $m = 4$ и $n = 6$.



Стигнахме до противоречие във всички случаи, с което и доказахме твърдението.

3 Заключение и бъдещо развитие

В този реферет успяхме да отговорим напълно на един сложен въпрос, а именно въпросът за покритие на полуравнината. Запълвайки празнината между равнината и квадранта, завършихме класификацията на L полимината в тази насока. В бъдеще може да разгледаме и други полимина, като например тези във формата на Z , Y и P , защото те притежават много голям потенциал за изследване. Естествено остава и вариантът да продължим изследванията си върху L полимината, защото темата има много възможности за развитие.

4 Благодарности

Искам да благодаря на научния си ръководител и учител по математика, Димитър Димитров, за помощта при изготвянето на проекта и моралната подкрепа. Също така съм благодарен на доц. Станислав Харизанов за полезните съвети. Последно, но не и по-важност, благодаря на УЧИМИ за възможността да участвам.

Литература

- [1] Ангел Райчев. L полимина. 2021.
- [2] Polyomino Tilings, <http://polyominoes.org/>