

ДВАДЕСЕТ И ПЪРВА
УЧЕНИЧЕСКА КОНФЕРЕНЦИЯ
УК'21

Л Полимина

Ангел Иванов Райчев
125 СУ „Боян Пенев“, XI клас, София

Научен ръководител:
Димитър Димитров
учител по математика, 125 СУ „Боян Пенев“

Съдържание

1	Увод	3
2	Къси L полимина	3
3	Дълги L полимина	9
4	Заключение	17
5	Бъдещо развитие	18
6	Благодарности	18

Абстракт

В тази статия разглеждаме полимина във формата на L . Интересуваме се от това кога правоъгълна дъска може да бъде покрита с такива полимина. Също така характеризираме фундаменталните правоъгълници за дадено полимино и намираме необходимо и достатъчно условие за това правоъгълник да може да бъде покрит.

Abstract

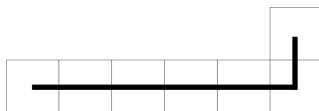
In this paper we look at L-shaped polyominoes. We are interested in finding a condition for a rectangle to can be fully covered with such polyominoes without overlapping them. We also describe the prime rectangles for some of the polyominoes and we find a necessary and sufficient condition for a rectangle to be coverable.

1 Увод

Мотивация за този проект е фактът, че след доминото, ъгловото тримино е може би най-изследваната фигура. Основният математически метод, използван в доказателствата, свързани с ъгловото тримино, е блочното оцветяване в четири цвята. Тъй като то представлява квадрат без една клетка, а квадратът е инвариантен по отношение на ротация и огледално отражение, тази техника дава много добри резултати. В този реферат се питаме, дали свойствата му се дължат на неговата близост до квадрат или по-скоро на наличието на ъгъл и затова разглеждаме L полимино. L полимино представлява издължено ъглово тримино. В тази статия разглеждаме два типа L полимина - късо L полимино и дълго L полимино. Първо разглеждаме свойствата на късото: търсим необходимо и достатъчно условие за това правоъгълник да може да бъде покрит и характеризираме фундаменталните му правоъгълници. След това преминаваме към дългото - при него основният въпрос е дали въобще съществува правоъгълник, който може да бъде покрит. Изследваме подробно този въпрос и в крайна сметка намираме отговора.

2 Къси L полимина

В тази секция ще разглеждаме L полимина с дължина $p - 1$ и ширина 2, тоест състоящи се от p квадратчета (p просто; $p > 3$). Търсим правоъгълниците, които могат да бъдат покрити с такива полимина. Освен това искаме да намерим фундаменталните правоъгълници на тези полимина.

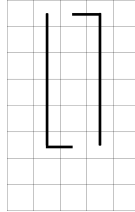


Ясно е, че ако за дъска $n \times m$ съществува покритие, то $p | nm$. Тоест поне едното от n и m се дели на p , нека това е m . Ширината на полиминото е 2, откъдето следва, че $n, m \geq 2$. Освен това $p | m$, тоест $m \geq p$. От тук следва, че най-малкият правоъгълник, който би могъл да се покрие с L полимина е $2 \times p$. Ясно е, че той може да бъде покрит, тоест той е фундаментален. Оттук следва, че правоъгълниците $2a \times pb$ също могат да бъдат покрити.

Чрез правоъгълници $2 \times p$ не могат да се покрият правоъгълници с нечетни дължини, защото те съдържат нечетен брой квадратчета, тоест има два варианта: те да не могат да се покрият изобщо или да съществуват други фундаментални правоъгълници.

Лема 1. Ако дъска $n \times t$ може да бъде покрита и t е нечетно, то $t \geq p$.

Доказателство. Да допуснем противното, тоест за някое нечетно $t \leq p - 2$ съществува покритие. Ясно е, че не можем да разположим хоризонтално полимино, защото то има дължина $p - 1$. Тоест всички полимина са вертикални. Да разгледаме как е запълнен първият ред. Всяко полимино покрива 0, 1 или 2 квадратчета. От това, че t е нечетно, следва, че съществува поне едно полимино, което покрива 1 квадратче. Нека то е насочено надясно. Сега разглеждаме как е покрито квадратчето вдясно на вече покритото квадратче. Има само един начин, по който може да се случи това, но тогава се образува затворен правоъгълник $(p - 3) \times 1$, който не може да бъде покрит, с което стигаме до противоречие.



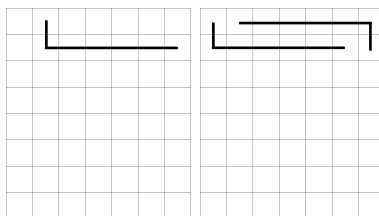
□

Лема 2. Ако дъска $n \times t$ може да бъде покрита и n и t са нечетни, то $n, t \geq p + 2$.

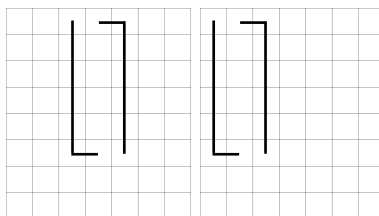
Доказателство. От Лема 1 знаем, че $n, t \geq p$, тоест остава да разгледаме случая, когато едното от тях е точно p , нека $t = p$. Допускаме, че съществува правоъгълник $n \times p$, който може да бъде покрит и взимаме най-малкия такъв (с най-малко n). Отново разглеждаме как са запълнени квадратчетата на първия ред. Всяко полимино запълва 0, 1, 2 или $p - 1$ квадратчета. Понеже 0, 2 и $p - 1$ са четни, съществува поне едно полимино покриващо само 1 квадратче. Нека това полимино е насочено надясно.

Ако това полимино е хоризонтално, то то може да покрива само първата или втората клетка на първия ред. Ясно е, че ако покрива втората

стигаме до противоречие, защото се образува правоъгълник $1 \times (p - 2)$, който не може да бъде покрит. Ако покрива първата клетка има само един начин да се покрие втората, но в такъв случай двете полимина, които поставихме, образуват правоъгълник $2 \times p$, откъдето следва, че останалият правоъгълник $(n - 2) \times p$ може да бъде покрит, което е противоречие с минималността на n .

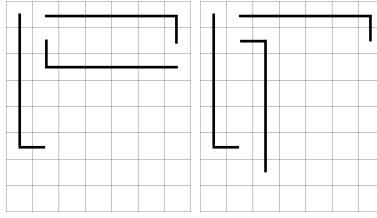


Тоест това полимино е вертикално. Ако то не покрива първата клетка на първия ред, то след клетката, която покрива, има най-много $p - 2$ други. Тоест полимината, покриващи тези квадратчета, са вертикални. Сега разглеждаме как е покрито квадратчето вдясно на вече покритото квадратче на първия ред. Има само един начин, по който може да се покрие, но тогава се образува затворен правоъгълник $(p - 3) \times 1$, който не може да бъде покрит, с което стигаме до противоречие.

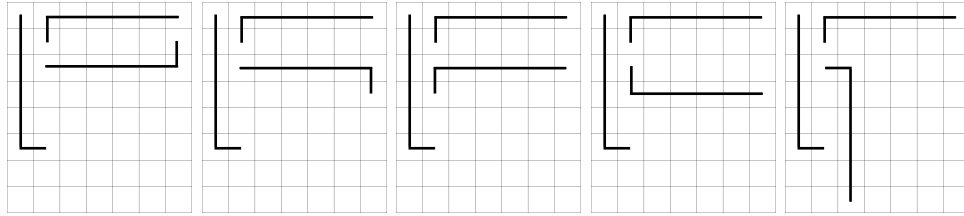


Оттук заключаваме, че има само едно полимино покриващо едно квадратче на първия ред, и то покрива първото. Аналогично получаваме, че второто квадратче не може да бъде покрито от полимино, покриващо 2 квадратчета, защото се образува затворен правоъгълник $(p - 3) \times 1$, тоест е покрито от полимино покриващо $p - 1$ квадратчета.

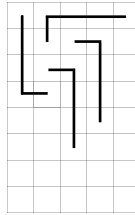
Ако края на това полимино е вдясно, то има два начина, по които можем да покривем второто квадратче на втория ред. И в двата случая се образуват затворени правоъгълници, $(p - 3) \times 1$ и $(p - 4) \times 1$, които не могат да бъдат покрити.



Тоест крайт на това полимино е вляво. Има пет начина, по които можем да покрим второто квадратче на третия ред. И в петте случая се образуват затворени правоъгълници с дължини: $(p-2) \times 1$, $(p-2) \times 1$, $(p-2) \times 2$, $(p-3) \times 2$ и $(p-5) \times 1$. Ясно е, че нито един от тях не може да бъде покрит, с което стигаме до противоречие.



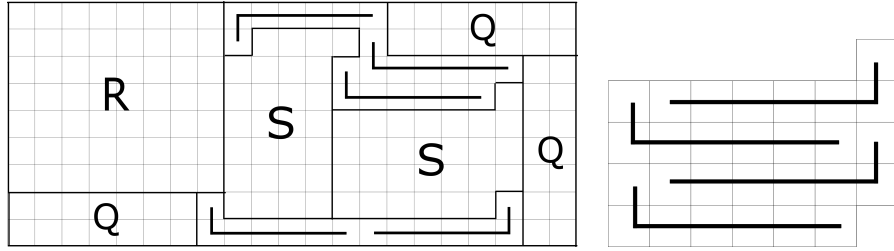
Важно е да се отбележи, че когато $p = 5$ не стигаме до противоречие, защото правоъгълник $(p-5) \times 1$ не съществува. В този случай разглеждаме как е покрито третото квадратче на втория ред, след което се оказва, че петото квадратче на втория ред няма как да бъде покрито.



□

Лема 3. Правоъгълникът $(p+2) \times 3p$ е фундаментален.

Доказателство. Да допуснем, че съществува правоъгълник $n \times m$ с нечетни дължини, който може да бъде покрит. От Лема 2 знаем, че $m, n \geq p+2$. Освен това знаем, че $p|n$, тоест $n \geq 3p$. Тоест най-малкият правоъгълник с нечетни дължини, който би могъл да бъде покрит е $(p+2) \times 3p$. Ясно е, че ако той може да бъде покрит, то той със сигурност ще е фундаментален. Сега ще покажем покритие на такъв правоъгълник:



Правоъгълниците, обозначени с Q , са с размери $p \times 2$ и за тях е ясно, че могат да се покрият. Правоъгълникът, обозначен с R , е с размери $p \times (p+1)$. Той може да се покрие с правоъгълници $p \times 2$, защото $p+1$ е четно. Фигурата обозначена с S представлява правоъгълник $(p-3) \times p$, чиято последна колона е изместена с едно нагоре. Покритие на тази фигура е представено вдясно на големия правоъгълник. $\square$

Теорема 4. *Единствените фундаментални правоъгълници на L полиминото са $2 \times p$ и $(p+2) \times 3p$.*

Доказателство. Вече доказахме, че $2 \times p$ и $(p+2) \times 3p$ са фундаментални. Сега остава да покажем, че всички правоъгълници, които могат да бъдат покрити, могат да се покрият и използвайки тези два правоъгълника. Знаейки, че $p|m$ ще разгледаме 4 случая за четността на n и m .

Ако n и m са четни. Нека $n = 2a$ и $m = 2bp$. Очевидно такъв правоъгълник може да се покрие с правоъгълници $2 \times p$, защото $2|2a$ и $p|2bp$.

Ако n е четно, а m е нечетно. Нека $n = 2a$ и $m = (2b+1)p$. Очевидно такъв правоъгълник може да се покрие с правоъгълници $2 \times p$, защото $2|2a$ и $p|(2b+1)p$.

Ако n е нечетно, а m е четно. Нека $n = 2a+1$ и $m = 2bp$. От Лема 1 знаем, че $n \geq p$, тоест $n = p+2c$. Ясно е, че правоъгълник $p \times 2bp$ може да се покрие с правоъгълници $2 \times p$, защото $2|2bp$ и $p|p$. Правоъгълник $2c \times 2bp$ също може да се покрие с правоъгълници $2 \times p$, защото $2|2c$ и $p|2bp$. Слелвайки правоъгълниците $p \times 2bp$ и $2c \times 2bp$ получаваме, че правоъгълник с размери $(p+2c) \times 2bp$ също може да се покрие, което и искахме да докажем.

Ако n и m са нечетни. Нека $n = 2a+1$ и $m = (2b+1)p$. От Лема 2 знаем, че $n, m \geq p+2$, тоест $n = 2c+p+2$ и $m = (2d+3)p$. Знаем, че

правоъгълник $(p+2) \times 3p$ може да се покрие. От предишния случай знаем, че и правоъгълник $(p+2) \times 2dp$ също може да се покрие. Слелвайки тези два правоъгълника получаваме, че правоъгълник $(p+2) \times (2d+3)p$ може да се покрие. От втория случай знаем, че правоъгълник $2c \times (2d+3)p$ може да се покрие, и комбинирайки го с $(p+2) \times (2d+3)p$, получаваме, че правоъгълникът $(2c+p+2) \times (2d+3)p$ може да се покрие, което и искахме да докажем. $\square$

Следствие 5. *Необходимо и достатъчно условие правоъгълник да може да бъде покрит с къси L полимина. Нека $a, b \in \mathbb{N}$ и нека $p|n$. Тогава правоъгълниците, които могат да бъдат покрити са:*

$$\begin{aligned} & ap \times 2b \\ & 2ap \times (p+2b-2) \\ & (2a+1) \times (p+2b) \end{aligned}$$

Следствие 6. *Дъска $n \times t$ може винаги да се покрие с къси L полимина, когато $p|nt$ и $\min(n, t) \geq p+1$.*

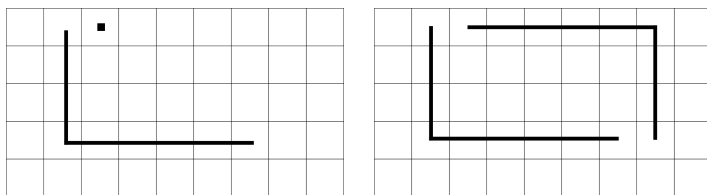
Забележка 7. *Важно е да се отбележи, че когато p не е просто, горните резултати не важат. Голяма част от твърденията се базират на факта, че ако $p|nt$, то p дели поне едното от n и t , което не е вярно, когато p е съставно. Например при $p = 6$ фундаменталните правоъгълници са: 6×2 , 12×7 , 15×8 , 14×9 , 16×9 , 15×10 , 18×11 и 34×9 . Както се вижда, те са много повече от два и дори правоъгълникът $18 \times 8 - 3p \times (p+2)$ - не е фундаментален. Всъщност, когато p е четно, правоъгълникът $3p \times (p+2)$ никога не е фундаментален, защото той може да се покрие с правоъгълници $p \times 2$, понеже $p|3p$ и $2|p+2$. При $p = 9$ правоъгълникът 27×11 е фундаментален, тъй че проблемът може би е само при четните, но това е тема за бъдеща работа.*

Забележка 8. *По този начин доказахме и обобщихме твърдения, присъщи за ъгловото тримино (фундаменталните правоъгълници 3×2 и 9×5 , които съответстват на $p \times 2$ и $3p \times (p+2)$), използвайки различна математическа техника на анализ. Оттук следва, че основните свойства на ъгловото тримино се дължат на наличието на ъгъл, докато приликите му с фигурата квадрат единствено улесняват доказателствата.*

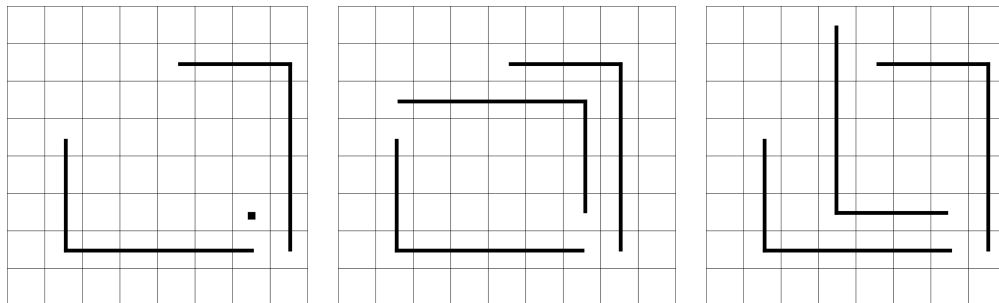
3 Дълги L полимина

В тази секция ще разглеждаме L дълги полимина, тоест полимина с размери $n \times m$, за които $n \geq m \geq 3$. Първо ще разгледаме някои основни разположения, за да може след това да минаваме по-бързо през случаите.

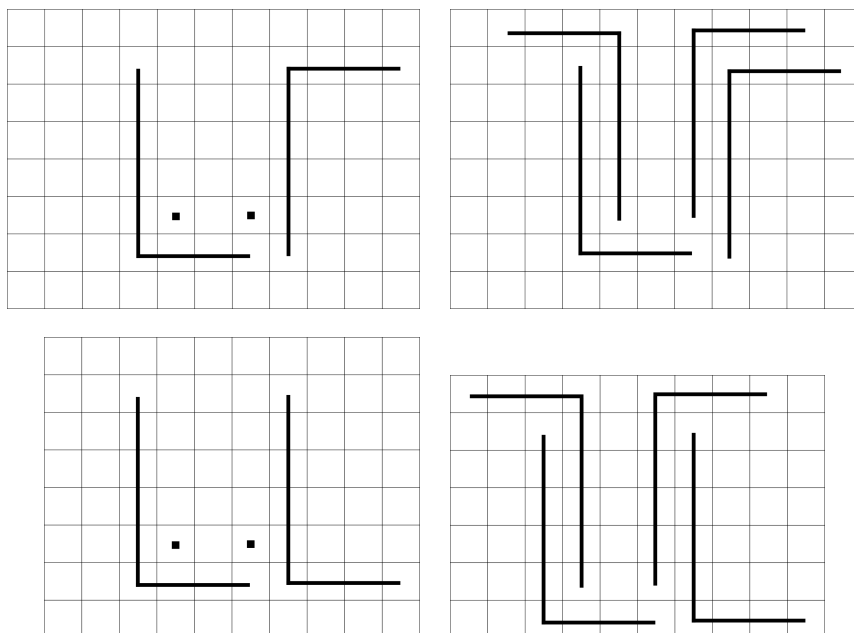
При това разположение стигаме до противоречие, защото единственото полимино, което може да запълни квадратчето с точка, води до затворен правоъгълник $(m-2) \times (n-1)$.



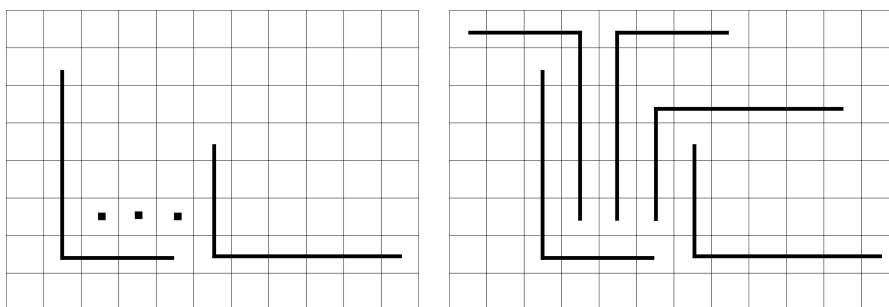
Има само два начина да се покрие квадратчето с точка, но и при двата се получават затворени правоъгълници с размери $(m-1) \times (n-2)$ и $(m-1) \times (n-3)$. Очевидно n не може да е 3 във втория случай, защото това би довело до $m = 3$, което означава още началната конструкция да е затворен правоъгълник.



Следващите два случая са идентични. И при двата има точно един начин да се покрият квадратчетата с точка и ако m е по-голямо от 3, стигаме до противоречие, защото няма как да се покрият квадратчетата, разположени между тези с точка.



В този случай имаме, че $m \geq 4$, но лесно се забелязва, че ако $m > 4$ стигаме до противоречие.



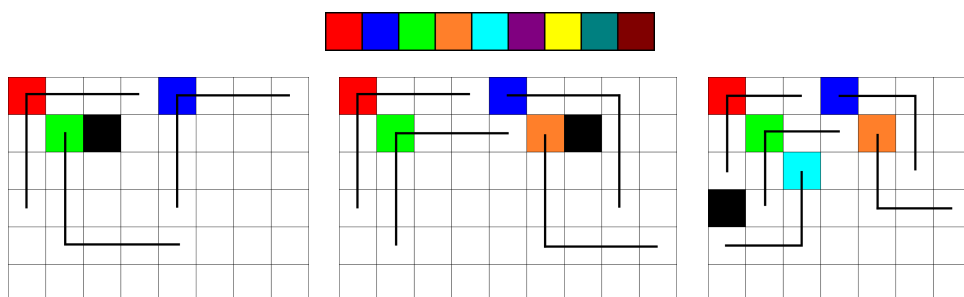
Знаейки какво се случва при тези конфигурации, сме готови да преминем към основната задача.

Теорема 9. *Не съществува правоъгълник, който може да бъде покрит с L дълги полимина.*

Доказателство. Да започнем с доказването на горното твърдение в един частен случай.

Лема 10. *Не съществува правоъгълник, който може да бъде покрит с L дълги полимина с размери $n \times n$.*

Доказателство. Щом дадено квадратче е оцветено, значи разглеждаме как може да бъде покрито. Ако някое квадратче е оцветено в черно, то не може да се покрие. Последователността по цветове, по която разглеждаме квадратчетата е тази:



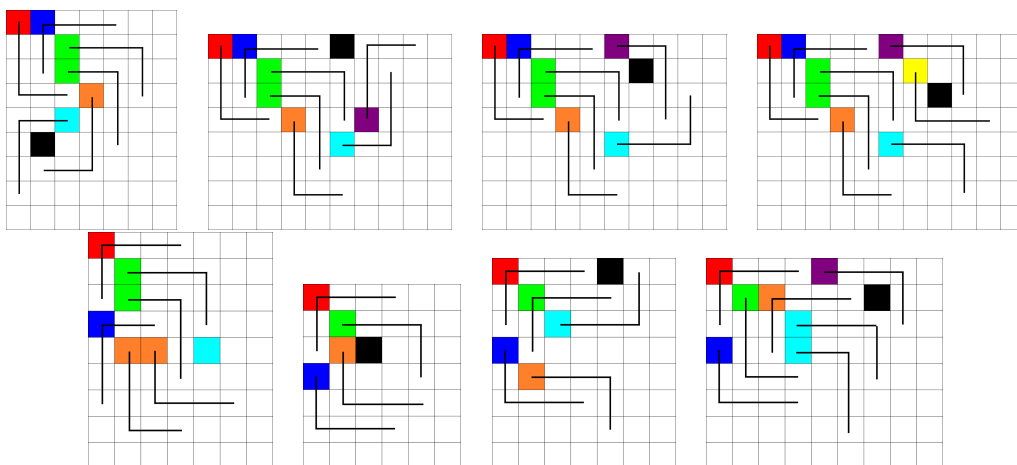
Допълнително разглеждаме случая за $n = 3$, защото както се вижда там противоречието идва на друго място.

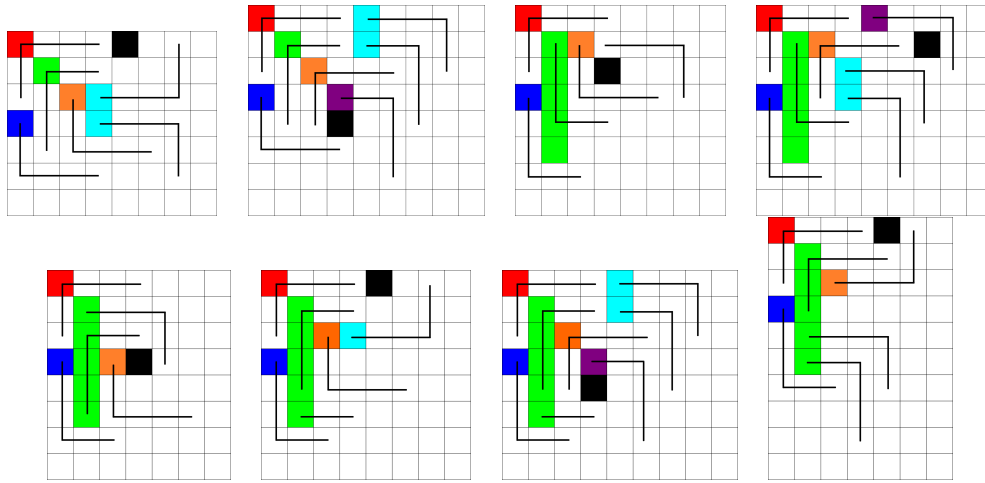
□

Вече знаейки, че $n \neq t$, можем да кажем, че $n \geq t + 1 \geq 4$. Сега ще проверим още два частни случая - 4×3 и 5×3 .

Лема 11. Не съществува правоъгълник, който може да бъде покрит с L полимина с размери 4×3 .

Доказателство. В първата картинка на втория ред се стига до идентична ситуация, както в предишните три картинки и затова не е подробно описана.

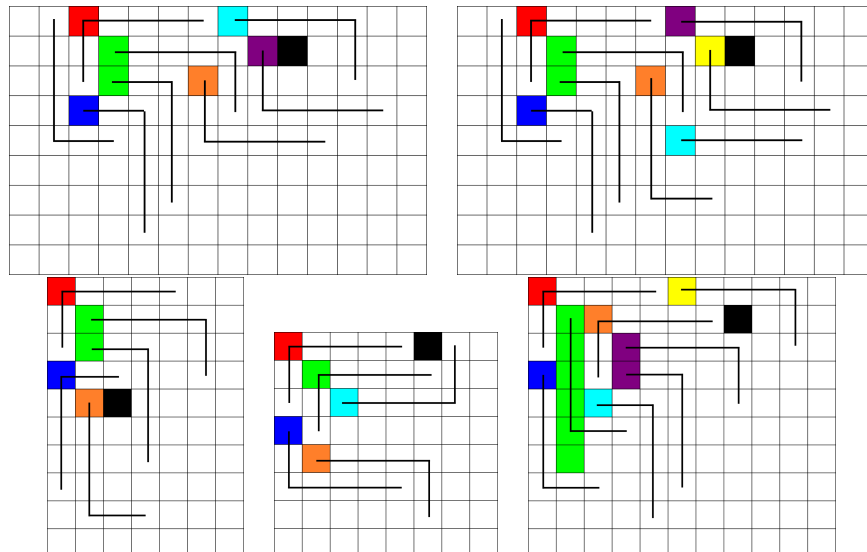


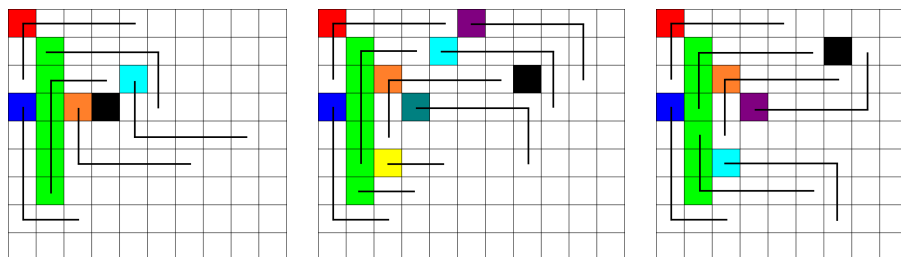


□

Лема 12. Не съществува правоъгълник, който може да бъде покрит с L полимина с размери 5×3 .

Доказателство. В първите две картинки разглеждаме дали е възможно полимино да покрива само една клетка от ръба. След като стигаме до противоречие, продължаваме нататък вече знайки, че ръба е покрит от „прилепени“ полимина.



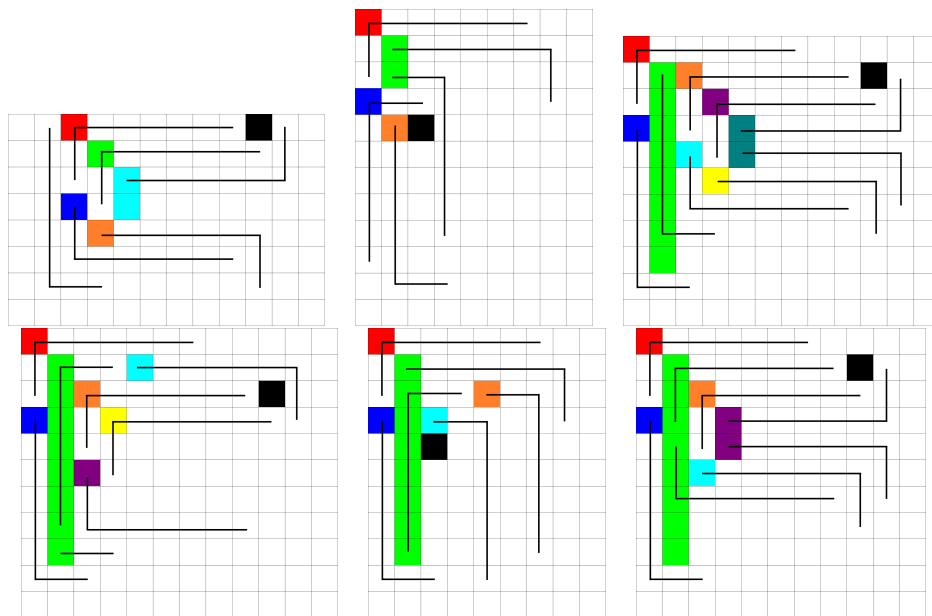


□

Преди да преминем към случая $n \times t$, ще разгледаме още един частен случай, а именно $n \times 3$.

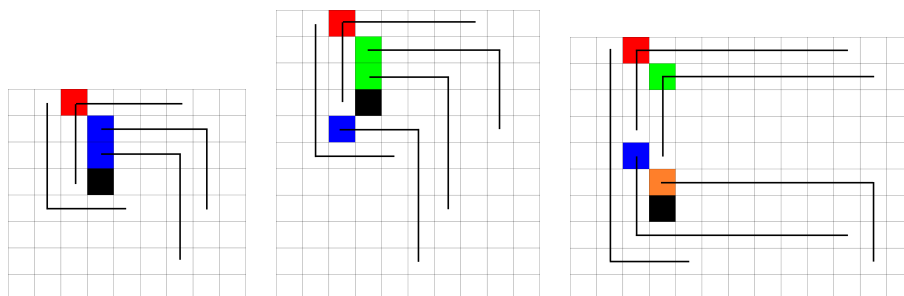
Лема 13. Не съществува правоъгълник, който може да бъде покрит с L полимина с размери $n \times 3$, където $n \geq 6$.

Доказателство. В първата картинка разглеждаме дали е възможно полимино да покрива само една клетка от ръба. След като стигаме до противоречие, продължаваме нататък вече знайки, че ръба е покрит от „прилепени“ полимина.

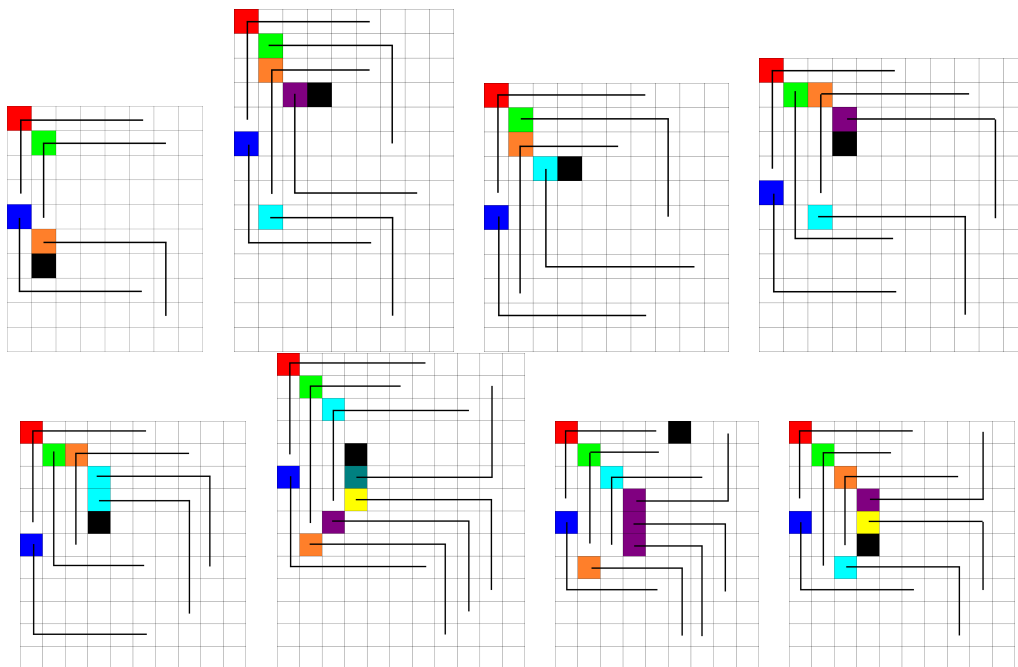


□

Сега вече можем да преминем към случая $n \times m$ вече знаейки, че $n > m \geq 4$. Както в предишните случаи, първо разглеждаме дали може дадено полимино да покрива само една клетка от ръба. В първата и втората картинка проверяваме случаите $n = m + 1$ и $n = m + 2$, защото там конфигурацията е малко по-различна, докато в третата разглеждаме общия случай.

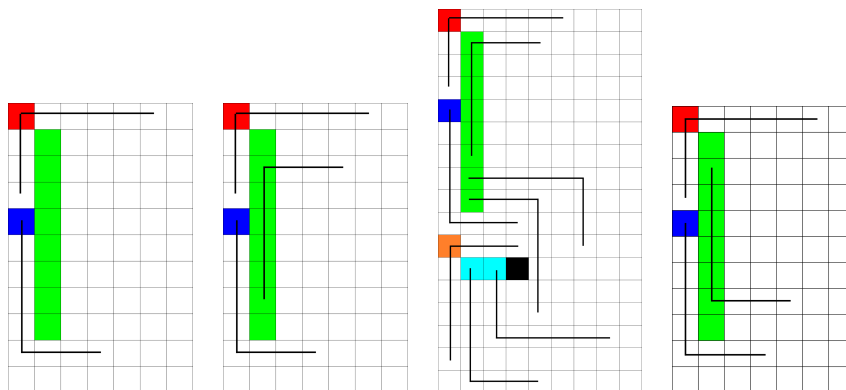


Сега вече знаейки, че няма полимина, които покриват само една клетка от ръба, разглеждаме как е покрит ъгълът на правоъгълника.

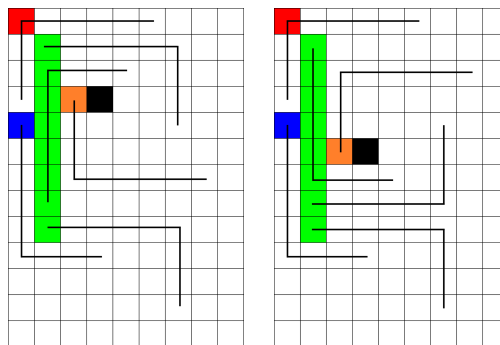


Остава да разгледаме само случая на първата картинка по-долу. Това е най-сложният и най-техническият случай. Интересуваме се от това как

може да са запълнени зелените квадратчета. Да допуснем, че съществува полимино, покриващо n от тях. Ясно е, че ако има такова, то то ще е единствено и всички други полимина, покриващи зелените квадратчета, ще покриват само по едно от тях. Първо да разгледаме случая, когато полиминото е разположено както е показано във втората картинка. Нека z_1 и z_2 са броят на зелените квадратчета, разположени над и под полиминото. Ясно е, че $z_1 \leq 1$, а от третата картинка става ясно, че $z_2 \leq 1$. От друга страна знаем, че $2 + z_1 + z_2 + n = n + m \Rightarrow m = z_1 + z_2 + 2 \leq 4 \Rightarrow m = 4, z_1 = z_2 = 1$. Ако полиминото е разположено както на четвъртата картинка, пак дефинираме z_1 и z_2 по същия начин. Знаем, че $z_1 = 0$, а $z_2 \leq 2$ и по същия начин разбираме, че това е възможно само в случая на равенство, когато $z_1 = 0, z_2 = 2, m = 4$.



След като знаем спецификите на този случай сме готови да преминем към проверяването му.

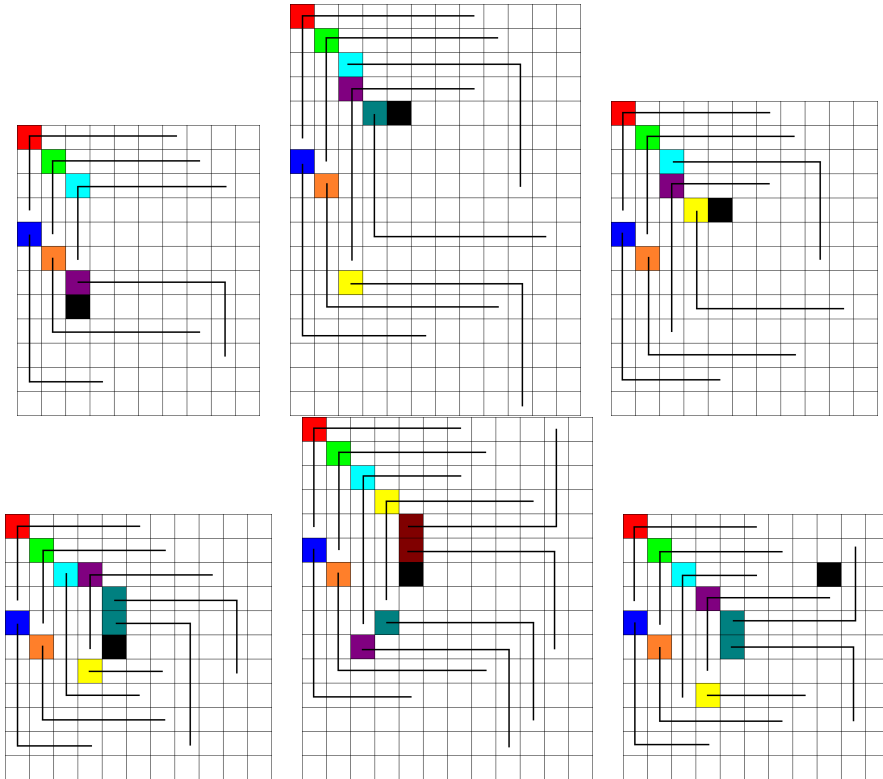


Както се вижда стигаме до противоречие и в двата случая, тоест не съществува полимино, покриващо n от зелените квадратчета. В следва-

щите картинки показваме проверяването на останалите случаи.

В предпоследната картинка разглеждаме случая, когато имаме 1 . Няма как да имаме 0 , защото в такъв случай получаваме уравненията: $2m = n + 3$ и $n = m + 1$, откъдето следва, че $n = 5$ и $m = 4$. Но това е невъзможно поради неравенството $n + m \geq 2m + 2$ (тези уравнения и неравенства идват от разположението на полимината в картинката).

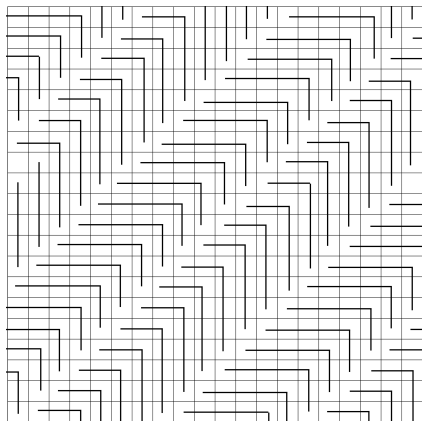
Разглеждаме последната картинка. Няма как да има 0 , защото в този случай получаваме уравненията $2m = n + 2$ и $n = m + 1$, откъдето следва, че $n = 4$ и $m = 3$, но това е невъзможно, защото $n, m \geq 4$.



□

Забележка 14. От това че докажахме, че е невъзможно да се покрие правоъгълник с дълги L полимина, следва, че свойствата на ъгловото тримино са свързани не само с наличието на ъгъл, но и с наличието на „къса“ страна.

Забележка 15. *Все пак невъзможността да се покрие краен правоъгълник с дълги L полимина не означава, че с тях не може да се покрие нищо. Оказва се, че с тях е възможно да се покрие цялата равнина, което всъщност е обобщен правоъгълник с безкрайни координати на върховете.*



4 Заключение

Успяхме да намерим необходимо и достатъчно условие за това правоъгълник да може да бъде покрит с къси L полимина, съдържащи p квадратчета (p -просто). Открихме и фундаменталните правоъгълници за тези полимина. При дългите L полимина се оказа, че не може да се покрие правоъгълник. От тези две твърдения заключаваме, че свойствата на ъгловите тримина са присъщи на късите L полимина, но не и на дългите. От друга страна фактът, че 3 е просто оказва голямо влияние върху фундаменталните правоъгълници, тъй че свойствата на триминото се асоциират най-добре с късото L полимино с p квадратчета. От друга страна не трябва да се омаловажа твърдението, че дългите L полимина не могат да покрият правоъгълник. На пръв поглед просто твърдение, но доказателството му въобще не е просто. Според мен това е най-същественият резултат в този реферат и резултатът, който има най-голям принос за математиката.

5 Бъдещо развитие

В бъдеще може да изследваме фундаменталните правоъгълници за късите L полимина, с p квадратчета, когато p е съставно. Установихме, че дългите L полимина покриват равнина и не покриват правоъгълник, но не знаем какво се случва по средата, възможно ли е да се покрие полуравнина? Освен това може да разгледаме и други полимина и да изследваме техните свойства.

6 Благодарности

Искам да благодаря на моя научен ръководител и учител по математика, Димитър Димитров, за помощта при изготвянето на проекта и моралната подкрепа. Също така съм благодарен на доц. Станислав Харизанов за полезните съвети. Благодаря и на моето училище, 125 СУ „Боян Пенев“, за това, че винаги е заставало зад мен и е подкрепяло моите решения. Последно, но не и по-важност, искам да благодаря на УЧИМИ за възможността да участвам.

Литература

- [1] Polyomino Tilings, <http://polyominoes.org/>
- [2] William Marshall. Packing Rectangles with Congruent Polyominoes. 1996.