

ДВАДЕСЕТА УЧЕНИЧЕСКА СЕКЦИЯ УС'20

ТЕМА НА ПРОЕКТА:

Оптимални стратегии за намиране
на принцеса в линейна таблица

Автор:

Ангел Райчев
125 СУ "Боян Пенев", 10 клас, София

Научен ръководител:

Димитър Димитров, 125. СУ "Боян Пенев"

Съдържание

1	Увод	4
2	Функцията $f(n, m)$ и нейните свойства	4
3	Стойности на $f(n, m)$ за $n > 4m$	4
3.1	Долна граница за $f(n, m)$	5
3.1.1	Ако n е четно	5
3.1.2	Ако n е нечетно	8
3.2	Горна граница	11
4	Стойности на $f(n, m)$ при $n \equiv m + 1 \pmod{2m - 1}$	12
4.1	Ако n е четно, $n = 2n_1$, $n_1 \in N$	12
4.1.1	Ако m е четно, $m = 2m_1$, $m_1 \in N$	12
4.1.2	Ако m е нечетно, $m = 2m_1 + 1$, $m_1 \in N$	13
4.2	Ако n е нечетно, $n = 2n_1 + 1$, $n_1 \in N$	14
5	Стойности на $f(n, m)$ за $n \leq 4m$	16
6	Обща формула за $f(n, m)$	17
7	Заклучение и бъдещо развитие	17

Оптимални стратегии за намиране на принцеса в линейна таблица

Абстракт

Статията е посветена на извесната задача за принцесата, поставена за първи път от Gary Antonick през 2014 г. Разглеждаме таблица $n \times 1$ и принцеса, която се намира в произволна клетка. Опитваме се да намерим принцесата, като на всеки ход проверяваме m от клетките в таблицата. Ако сме намерили принцесата играта приключва, в противен случай тя се премества в съседна клетка. В тази статия откриваме минималния брой ходове, след които ще сме сигурни, че ще сме открили принцесата.

В бъдещи статии по тази тема бихме искали да изследваме съществуването на стратегия за откриване на принцесата в по-сложни конфигурации.

Optimal strategies for finding a princess in a linear table

Abstract

This article is based on the popular princess problem, which was introduced for the first time by Gary Antonick in 2014. We consider a table $n \times 1$ and a princess who is situated in a certain cell. We try to find the princess by looking at m of the cells of the table on each turn. If we have found the princess, the game is over. Otherwise she moves to an adjacent cell. In this article we determine the minimum number of turns needed to be sure that we will find the princess.

In future articles on this topic we would like to investigate the existence of a strategy for finding the princess in more complicated configurations.

1 Увод

Разглеждаме таблица $n \times 1$ и принцеса, която се намира в произволна клетка. Опитваме се да намерим принцесата като на всеки ход проверяваме m от клетките в таблицата. Ако сме намерили принцесата играта приключва, в противен случай тя се премества в съседна клетка.

Интересуваме се от минималния брой ходове, след които ще сме сигурни, че ще сме открили принцесата. Задачата е поставена за пръв път през 2014 г. от Gary Antonick [2]. През 2016 г. Емил Колев и Николай Белухов решават задачата при $m = 1$ [1]. В тази статия ще решим задачата в общия случай.

2 Функцията $f(n, m)$ и нейните свойства

Дефиниция 2.1. Нека с $f(n, m)$ означим минималния брой ходове, след които ще сме сигурни, че ще открием принцесата.

Лема 2.1. Ако $n_1 \leq n_2$, то $f(n_1, m) \leq f(n_2, m)$.

Доказателство. Нека разгледаме оптималната стратегия за откриване на принцесата в таблицата с n_2 клетки. Нека разделим таблицата на две по-малки таблици, едната с n_1 клетки, а другата с $n_2 - n_1$ клетки и нека забраним на принцесата да преминава от едната в другата таблица. Освен това нека принцесата е започнала от таблицата с n_1 клетки. Ясно е, че оптималната стратегия ще върши работа и в този случай, защото сме ограничили възможностите за движение на принцесата и сме добавили допълнителна информация за това от къде е започнала. От друга страна щом тя е започнала от таблицата с n_1 клетки и не може да преминава от едната в другата таблица, то тя може да се намира само в първата таблица. Тоест стратегията за таблица с n_2 клетки работи и за таблица с n_1 клетки $\Rightarrow f(n_2, m) \geq f(n_1, m)$, с което доказахме твърдението. $\square$

3 Стойности на $f(n, m)$ за $n > 4m$

Ще отговаряме едно квадратче в: сиво, ако има шанс принцесата да е в него и в бяло, ако принцесата не е в него. Забелязваме, че ако принцесата се намира на квадратче на четна позиция, то на следващия ден ще се намира на квадратче на нечетна и обратното. Тоест можем да разделим таблицата на две части в зависимост от това дали принцесата е започнала от квадратче на четна или на нечетна позиция. По този начин в едната част винаги ще има квадратчета на позиции от едната четност, а в другата част — на позиции от другата четност. Тези две части ще бъдат напълно независими, защото ако едно квадратче е сиво в едната част, то то ще е бяло в другата. Тоест щом правим смислена проверка (проверяваме квадратче, в което може да се намира принцесата), а нас не ни интересуват безмислените проверки, то значи го правим само в едната от двете части.



Дефиниция 3.1. Нека T_i е множество от клетки, в които може да бъде принцесата в i -ия ден. Нека проверим t от тях. Вече знаем, че принцесата не е в никоя от проверените клетки, тоест множеството T_i е намаляло с t клетки. Нека новополученото множество е R_i . Разглеждаме всички съседи на клетките в R_i и нека това е множеството T_{i+1} — клетките, в които принцесата може да се намира на следващия ден

$$\alpha(t, T_i) = |T_i| - |T_{i+1}|.$$

Дефиниция 3.2. През i -ия ден нека M_i е множеството от всички сиви клетки, а P_i и Q_i са множествата от сивите клетки във всяка една от частите. Също така нека p_i и q_i са броят на проверените клетки в P_i и Q_i съответно.

Дефиниция 3.3. Нека $\alpha(m, M_i)$ е α елементът за i -ия ден, тоест промяната в броя на сивите клетки между i -тия и $i + 1$ -вия ден.

Дефиниция 3.4. Нека „реда на α -ите“ представлява реда от α елементите наредени в зависимост от дните. $[\alpha(m, M_1), \alpha(m, M_2), \dots, \alpha(m, M_k)]$

3.1 Долна граница за $f(n, m)$

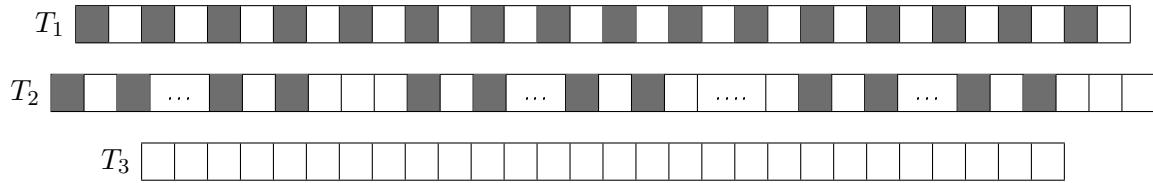
3.1.1 Ако n е четно

Лема 3.1. $\alpha(p_i, P_i) \leq p_i$, тоест максималната промяна в броя на сивите клетки е равна на броят на проверените клетки.

Доказателство. Нека R_i е множеството на P_i без проверените p_i клетки. Знаем, че $|R_i| = |P_i| - p_i$ Б.О.О. Множеството R_i съдържа клетки на нечетни позиции, тогава всяка клетка има съсед вдясно, тоест множеството P_{i+1} съдържа поне толкова клетки колкото R_i . Оттук получаваме неравенството: $|P_{i+1}| \geq |R_i| = |P_i| - p_i$, тоест $|P_i| - |P_{i+1}| \leq p_i$ или $\alpha(p_i, P_i) \leq p_i$ $\square$

Следствие 3.2. Аналогично доказваме, че $\alpha(q_i, Q_i) \leq q_i \Rightarrow \alpha(m, M_i) \leq m$ и освен това, ако $\alpha(m, M_i) = m \Rightarrow \alpha(p_i, P_i) = p_i$ и $\alpha(q_i, Q_i) = q_i$

Дефиниция 3.5. Нека T_1 , T_2 и T_3 са възможните позиции на всяка от двете части. T_1 представлява позицията, когато всички клетки, които могат да са сиви са сиви. T_3 представлява позицията, когато всички клетки са бели. T_2 е междинна позиция между T_1 и T_3 . За удобство разделяме T_2 на сектори, като сивите клетки в секторите са разположени през една, а разстоянието между секторите е повече от една клетка.



Лема 3.3. Ако $P_i \equiv T_2$ (аналогично за Q), $\alpha(p_i, P_i) = p_i$ и $\alpha(p_{i+1}, P_{i+1}) = p_{i+1}$, то $P_3 \equiv T_3$.

Доказателство. Означаваме с $B_0, B_1, \dots, B_w$ секторите в P_i , а с $b_0, b_1, \dots, b_w$ броя на проверените квадратчета във всеки от тях.



За всяко $i \geq 1$:

$$\alpha(b_i, B_i) \leq \begin{cases} b_i, & \text{ако } b_i = |B_i| \\ b_i - 1, & \text{ако } b_i < |B_i| \end{cases} \quad (1)$$

Ако $\alpha(p_i, P_i) = p_i$, то за всяко i е в сила: $\alpha(b_i, B_i) = b_i$, в частност за всяко $i \geq 1$ $b_i = |B_i|$. Щом всеки един сектор B_i , $i \geq 1$, е бил елиминиран изцяло (всички клетки са били проверени), то сивите клетки в P_{i+1} ще дойдат изцяло от B_0 . Ако $P_{i+1} \equiv T_3 \Rightarrow P_3 \equiv T_3$ и твърдението е доказано, ако ли не $P_{i+1} \equiv T_2$.

По същия начин нека означим с $C_0, C_1, \dots, C_v$ секторите в P_{i+1} . Знаем, че секторът C_0 почва плътно от началото на таблицата, но от друга страна знаем, че никой от съседите на B_0 не се допира до краищата на таблицата, тоест $|C_0| = 0$. Аналогично прилагайки същите расъждения от по-горе за $C_1, C_2, \dots, C_v$ ще получим, че всеки един от тези сектори е бил елиминиран и при липсата на клетки в C_0 получаваме: $P_3 \equiv T_3$, с което доказахме исканото. $\square$

Лема 3.4. Нека $\alpha(p_i, P_i) = p_i$ и R_i е множеството P_i без проверените p_i клетки. Нека $R_i \equiv T_2$ и да означим с $D_0, D_1, \dots, D_u$ секторите в R_i . В такъв случай $|D_1| = |D_2| = \dots = |D_u| = 0$

Доказателство. Нека си кръстим с E_i съседите на клетките в D_i . За всяко $i \geq 1$ е ясно, че при $|D_i| \geq 1$ $|E_i| = |D_i| + 1$, а при $|D_i| = 0$ $|E_i| = 0$. Следователно при $i \geq 1$ $|E_i| = |D_i| \iff |D_i| = 0$
 $|P_{i+1}| = |E_0| + |E_1| + \dots + |E_u| \geq |D_0| + |D_1| + \dots + |D_u| = |R_i| = |P_i| - p_i$, тоест $P_i - P_{i+1} \leq p_i \iff$
 $\iff \alpha(p_i, P_i) \leq p_i$ като равенство се достига при $|D_1| = |D_2| = \dots = |D_u| = 0$. $\square$

Лема 3.5. Ако $P_i \equiv T_1$, $\alpha(p_i, P_i) = p_i$ и $p_i > 0$, то проверените клетки трябва да са следните. (Оцветяваме в черно клетка, ако проверяваме дали принцесата е в нея.)



Доказателство. Нека R_i е множеството P_i без проверените p_i клетки. Ясно е, че $R_i \equiv T_2$, тоест можем да приложим Лема 3.4, откъдето следва, че в R_i трябва да присъства само един сектор, който е долепен до края на таблицата, тоест проверените клетки в този случай са точно маркираните в черно в таблицата по-горе. $\square$

Лема 3.6. Ако $P_i \equiv T_1$, $\alpha(p_i, P_i) = p_i$ и $p_i > 0$, то $\alpha(p_{i+1}, P_{i+1}) \leq p_{i+1}$.

Доказателство. Да допуснем противното, тоест $\alpha(p_{i+1}, P_{i+1}) = p_{i+1}$. От Лема 3.5 знаем кои ще са проверените клетки в P_i , откъдето заключаваме, че $P_{i+1} \equiv T_2$ и че P_{i+1} се разбива само на два сектора A_0 и A_1 , за които знаем, че $|A_0| = 0$ и $|A_1| = \frac{n}{2} - p_i > 2m - m = m$, но от Лема 3.3 знаем, че броят на проверените клетки в A_1 е равен на големината му, която пък е по-голяма от m , с което стигаме до противоречие. $\square$

Ще изследваме случаите, в които имаме няколко последователни α елемента равни на m .

1 сл. $P_i \equiv T_1$ и $Q_i \equiv T_1$

За да може $\alpha(m, M_i) = m$, то $\alpha(p_i, P_i) = p_i$ и $\alpha(q_i, Q_i) = q_i$

Поне едно от p_i и q_i е по-голямо от нула. Нека $p_i > 0$

От Лема 3.6 $\Rightarrow \alpha(m, M_{i+1}) < m$, тоест в този случай не е възможно да се случи исканото.

2 сл. $P_i \equiv T_1$ и $Q_i \equiv T_2$

Ще докажем, че е възможно да има най-много три последователни α елемента равни на m . Да допуснем противното, тоест има четири последователни α елемента равни на m .

$\alpha(m, M_i) = m$, $\alpha(m, M_{i+1}) = m$ и $\alpha(m, M_{i+2}) = m \Rightarrow p_i = p_{i+1} = p_{i+2} = 0$, защото в противен случай от Лема 3.6 ще стигнем до противоречие. Също така от Лема 3.3 $\Rightarrow Q_{i+2} \equiv T_3$. Знаем, че $P_3 \equiv T_1$ и $Q_{i+2} \equiv T_3 \Rightarrow q_{i+2} = 0 \Rightarrow p_{i+2} = m \neq 0$, с което стигаме до противоречие.

Забележка 3.7. За да има два или повече последователни α елемента равни на m , в този случай, е необходимо да се започне от положение, в което и двете части не са празни и да се завърши в такова, в което едната от частите е празна. Тоест този случай може да се случи еднократно.

3 сл. $P_i \equiv T_1$ и $Q_i \equiv T_3 \Rightarrow q_i = 0 \Rightarrow p_i = m > 0$ и от Лема 3.6 $\Rightarrow \alpha(m, M_{i+1}) < m$, тоест в този случай не е възможно да се случи исканото.

4 сл. $P_i \equiv T_2$ и $Q_i \equiv T_2$

Ще докажем, че е възможно да има най-много два последователни α елемента равни на m . Да допуснем противното, тоест три последователни α елемента равни на m .

От Лема 3.3 $\Rightarrow P_3 \equiv Q_{i+2} \equiv T_3$, тоест $\alpha(m, M_{i+2}) = 0 < m$, с което стигаме до противоречие.

Забележка 3.8. За да има два последователни α елемента равни на m , в този случай, е необходимо да се завърши в такова положение на двете части, в което и в двете няма сиви квадратчета, тоест принцесата е била намерена и играта е приключила. Тоест този случай може да се случи еднократно.

5 сл. $P_i \equiv T_2$ и $Q_i \equiv T_3$

Ще докажем, че е възможно да има най-много два последователни α елемента равни на m . Да допуснем противното, тоест три последователни α елемента равни на m .

От Лема 3.3 $\Rightarrow P_3 \equiv Q_{i+2} \equiv T_3$, тоест $\alpha(m, M_{i+2}) = 0 < m$, с което стигаме до противоречие.

Забележка 3.9. За да има два последователни α елемента равни на m , в този случай, е необходимо да се завърши в такова положение на двете части, в което и в двете няма сиви квадратчета, тоест принцесата е била намерена и играта е приключила. Тоест този случай може да се случи еднократно.

Забележка 3.10. Очевидно **4 сл.** и **5 сл.** не могат да се случат едновременно, защото и при двата случая играта приключва.

Следствие 3.11. За да има три последователни α елемента равни на m , започвайки от i -тия ход, е необходимо: $P_i \equiv T_1, Q_i \equiv T_2; P_{i+1} \equiv T_1, Q_{i+1} \equiv T_2; P_3 \equiv T_1, Q_{i+2} \equiv T_3$ или обратното.

Следствие 3.12. За да има два последователни α елемента равни на m , в средата на реда на α -ите, започвайки от i -тия ход, е необходимо: $P_i \equiv T_1, Q_i \equiv T_2$ или обратното.

Теорема 3.13. Ако x е броят на α елементите равни на m , а y е броят на α елементите по-малки от m , то: $x \leq y + 4$.

Доказателство. От горните пет случая знаем, че ако има няколко последователни α елемента равни на m в реда на α -ите, то те могат да се намират на две места, като при това на едното място може да има най-много три последователни, а на другото два.

Нека разделим реда на α -ите на групи:

$$[X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_k, Y_k, X_{k+1}]$$

При това разделяне в групите X се съдържат елементи равни на m , а в групите Y , елементи по-малки от m . Знаем, че във всяка група има поне един елемент, освен в групите X_1 и X_{k+1} .

$$x = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_k| + |X_{k+1}| \leq 2 + 3 + k - 1 = k + 4$$

$$y = |Y_1| + |Y_2| + \dots + |Y_k| \geq k$$

$$x \leq k + 4 \leq y + 4 \Rightarrow x \leq y + 4$$

□

Теорема 3.14. За n четно и $n > 4m$ е вярно, че: $f(n, m) \geq \frac{2n-4}{2m-1}$

Доказателство. От теорема 3.13 знаем, че $x \leq y + 4 \iff 2mx + (2m - 2)y - 4 \leq (2m - 1)x + (2m - 1)y$

$$2n - 4 \leq 2(mx + (m - 1)y) - 4 = 2mx + (2m - 2)y - 4 \leq (2m - 1)x + (2m - 1)y = (2m - 1)(x + y)$$

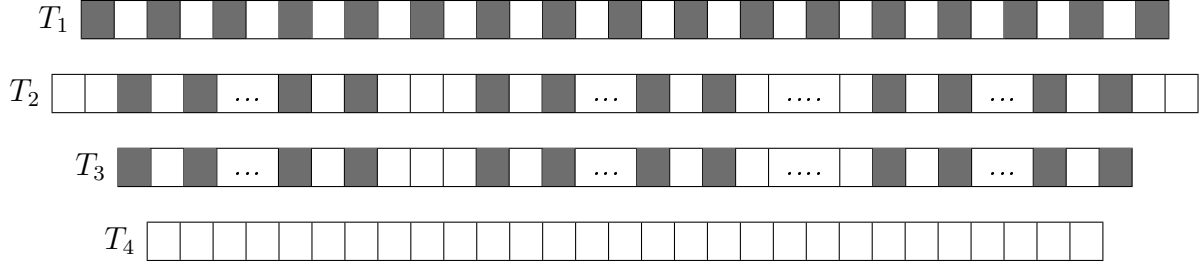
Тоест $\frac{2n-4}{2m-1} \leq x + y \leq f(n, m)$, с което стигаме до исканото:

$$f(n, m) \geq \frac{2n - 4}{2m - 1}$$

□

3.1.2 Ако n е нечетно

Дефиниция 3.6. Нека T_1 , T_2 , T_3 и T_4 са възможните позиции на всяка от двете части. T_1 представлява позицията, когато сивите клетки са на нечетни позиции и всички клетки, които могат да са сиви са сиви. T_4 представлява позицията, когато всички клетки са бели. T_3 е междинна позиция между T_1 и T_4 , при която сивите клетки се намират на нечетни позиции. T_2 е позицията, при която сивите клетки са на четни позиции. За удобство разделяме T_2 и T_3 на сектори.



Лема 3.15. $\alpha(p_i, P_i) \leq p_i + 1$, тоест максималната промяна в броя на сивите клетки, в едната част, е с едно по-голяма от броя на проверените клетки.

Доказателство. Нека R_i е множеството P_i без проверените p_i клетки. Ако махнем най-дясната сива клетка на R_i на всяка от останалите можем да съпоставим съсед вдясно, тоест $|P_{i+1}| \geq |R_i| - 1 = |P_i| - p_i - 1 \Rightarrow \alpha(p_i, P_i) \leq p_i + 1$. $\square$

Лема 3.16. $\alpha(p_i, P_i) = p_i + 1$, тогава и само тогава, когато $p_i = 0$ и $P_i \equiv T_1$.

Доказателство. При $p_i = 0$ и $P_i \equiv T_1 \Rightarrow \alpha(0, P_i) = 1$, тоест обратната посока е доказана, затова нека се насочим към правата. Нека R_i е множеството P_i без проверените p_i клетки. Ще е достатъчно да докажем, че $R_i \equiv T_1$.

Ако $R_i \equiv T_2$ на всяка клетка в T_2 съпоставяме съсед вдясно, тоест $|P_{i+1}| \geq |R_i| = |P_i| - p_i \Rightarrow |P_i| - |P_{i+1}| \leq p_i \iff \alpha(p_i, P_i) \leq p_i$, тоест $R_i \not\equiv T_2$.

Ако $R_i \equiv T_3$ на всяка клетка в T_3 съпоставяме съсед вдясно, освен на тези от последния сектор, при които съпоставяме съсед вляво. Тоест $|P_{i+1}| \geq |R_i| = |P_i| - p_i \Rightarrow |P_i| - |P_{i+1}| \leq p_i \iff \alpha(p_i, P_i) \leq p_i$, тоест $R_i \not\equiv T_3$.

Ако $R_i \equiv T_4$, то $P_{i+1} \equiv T_4 \Rightarrow |P_{i+1}| = |R_i| = |P_i| - p_i \Rightarrow \alpha(p_i, P_i) = p_i$, тоест $R_i \not\equiv T_4$.

При положение, че $R_i \not\equiv T_2, T_3, T_4 \Rightarrow R_i \equiv T_1$, с което твърдението е доказано. $\square$

Лема 3.17. $\alpha(m, M_i) \leq m + 1$, тоест максималната промяна в броя на сивите клетки, в цялата таблица, е с едно по-голяма от броя на проверените клетки.

Доказателство. Да допуснем противното, тоест $\alpha(m, M_i) \geq m + 2$.

$m + 2 \leq \alpha(m, M_i) = \alpha(p_i, P_i) + \alpha(q_i, Q_i) \leq p_i + 1 + q_i + 1 = m + 2$, като равенство се достига, когато $\alpha(p_i, P_i) = p_i + 1$ и $\alpha(q_i, Q_i) = q_i + 1$, а от Лема 3.16 $\Rightarrow P_i \equiv Q_i \equiv T_1$, но това е невъзможно, защото в такъв случай и двете части съдържат сиви квадратчета на нечетни позиции. $\square$

Лема 3.18. Ако $P_i \equiv T_2$ и $\alpha(p_i, P_i) = p_i$, то $P_{i+1} \equiv T_4$.

Доказателство. Ще е достатъчно да докажем, че $p_i = |P_i|$. Означаваме с $A_1, \dots, A_w$ секторите в P_i , а с $a_1, a_2, \dots, a_w$ броя на проверените квадратчета във всеки от тях.

$$\alpha(a_i, A_i) \leq \begin{cases} a_i, & \text{ако } a_i = |A_i| \\ a_i - 1, & \text{ако } a_i < |A_i| \end{cases} \quad (2)$$

$\alpha(p_i, P_i) = \alpha(a_1, A_1) + \alpha(a_2, A_2) + \dots + \alpha(a_w, A_w) \leq a_1 + a_2 + \dots + a_w = p_i$, като равенство се достига при $a_i = |A_i|$ за всяко i , тоест $p_i = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_w| = |P_i|$, с което твърдението е доказано. $\square$

Лема 3.19. $\alpha(m, M_i) = m + 1$ единствено, когато $P_i \equiv T_1$, $Q_i \equiv T_2$ и $|Q_i| = m$

Доказателство. Ясно е, че щом $\alpha(m, M_i) = m + 1$, то или $\alpha(p_i, P_i) = p_i + 1$, или $\alpha(q_i, Q_i) = q_i + 1$. Нека $\alpha(p_i, P_i) = p_i + 1$ и от Лема 3.16 $\Rightarrow p_i = 0 \Rightarrow q_i = m$. За да се случи исканото трябва $\alpha(q_i, Q_i) = q_i$. Ако $Q_i \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(q_i, Q_i) = 0 = q_i = m$, откъдето стигаме до противоречие. Тоест $Q_i \equiv T_2$ и прилагайки Лема 3.18 стигаме до извода, че $Q_{i+1} \equiv T_4 \Rightarrow |Q_i| = q_i = m$, с което твърдението е доказано. $\square$

Забележка 3.20. За да има α елемент равен на $m + 1$ трябва да се започне от положение, в което и в двете части има сиви квадратчета и да се завърши в такова, в което в една от частите няма сиви квадратчета. Тоест това може да се случи еднократно.

Лема 3.21. Ако $\alpha(m, M_i) = m + 1$, то $\alpha(m, M_{i-1}) \leq m - 1$

Доказателство. От Лема 3.19 $\Rightarrow P_i \equiv T_1$, $Q_i \equiv T_2$ и $|Q_i| = m$
 $\alpha(p_{i-1}, P_{i-1}) = |P_{i-1}| - |P_i| \leq -1$. $|Q_i| = m \Rightarrow |Q_{i-1}| \leq 2m < \frac{n}{2} < \frac{n+1}{2} = |T_1| \Rightarrow Q_{i-1} \not\equiv T_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha(q_{i-1}, Q_{i-1}) \leq q_{i-1} \Rightarrow \alpha(m, M_{i-1}) = \alpha(p_{i-1}, P_{i-1}) + \alpha(q_{i-1}, Q_{i-1}) \leq -1 + q_{i-1} \leq m - 1$ $\square$

Лема 3.22. Ако $\alpha(m, M_i) = m + 1$, то $\alpha(m, M_{i+1}) \leq m - 1$

Доказателство. От Лема 3.19 $\Rightarrow P_i \equiv T_1$, $Q_i \equiv T_2$ и $|Q_i| = m$
 $P_{i+1} \equiv T_2$ и $|P_{i+1}| = \frac{n-1}{2} > m \Rightarrow P_3 \not\equiv T_4$ и от Лема 3.18 $\Rightarrow \alpha(p_{i+1}, P_{i+1}) \leq p_{i+1} - 1$
 $Q_{i+1} \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(q_{i+1}, Q_{i+1}) = 0 \Rightarrow \alpha(m, M_{i+1}) = \alpha(p_{i+1}, P_{i+1}) + \alpha(q_{i+1}, Q_{i+1}) \leq$
 $\leq p_{i+1} - 1 + 0 \leq m - 1$ $\square$

Ще изследваме случаите, в които имаме няколко последователни α елемента равни на m .

1 сл. $P_i \equiv T_1$

$P_i \equiv T_1 \Rightarrow P_{i+1} \equiv T_2$ или T_4 , но $|P_i| > m$, откъдето следва, че $P_{i+1} \not\equiv T_4 \Rightarrow P_{i+1} \equiv T_2$
 $|P_{i+1}| \geq |P_i| - m \geq \frac{n+1}{2} - m > 2m - m = m \Rightarrow P_3 \not\equiv T_4$ и от Лема 3.18 $\Rightarrow \alpha(p_{i+1}, P_{i+1}) \leq p_{i+1} - 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha(q_{i+1}, Q_{i+1}) \geq q_{i+1} + 1$ и от Лема 3.16 $\Rightarrow Q_{i+1} \equiv T_1 \Rightarrow \alpha(q_i, Q_i) = |Q_i| - |Q_{i+1}| \leq -1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha(p_i, P_i) \geq m + 1 \geq p_i + 1$ и от Лема 3.16 $\Rightarrow p_i = 0$, но в такъв случай $\alpha(p_i, P_i) = 1 < m + 1$, тоест в този случай не е възможно да се случи исканото.

2 сл. $P_i \equiv T_2$ и $Q_i \equiv T_2$

$\alpha(m, M_i) = \alpha(p_i, P_i) + \alpha(q_i, Q_i) \leq p_i + q_i = m \Rightarrow \alpha(p_i, P_i) = p_i$ и $\alpha(q_i, Q_i) = q_i$ и от Лема 3.18 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow P_{i+1} \equiv T_4$ и $Q_{i+1} \equiv T_4$, но в такъв случай $\alpha(m, M_{i+1}) = 0 < m$, тоест в този случай не е възможно да се случи исканото.

3 сл. $P_i \equiv T_2$, а $Q_i \equiv T_4$

$\alpha(q_i, Q_i) = 0 \Rightarrow \alpha(p_i, P_i) = m \geq p_i$ и от Лема 3.18 $\Rightarrow P_{i+1} \equiv T_4$ и $Q_{i+1} \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(m, M_{i+1}) = 0 <$

m , тоест в този случай не е възможно да се случи исканото.

4 сл. $P_i \equiv T_2$ и $Q_i \equiv T_3$

$\alpha(m, M_i) = \alpha(p_i, P_i) + \alpha(q_i, Q_i) \leq p_i + q_i = m \Rightarrow \alpha(p, P) = p$ и от Лема 3.18 $\Rightarrow P_{i+1} \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(p_{i+1}, P_{i+1}) = 0 \Rightarrow \alpha(q_{i+1}, Q_{i+1}) = m$, освен това $Q_{i+1} \equiv T_2$ или $Q_{i+1} \equiv T_4$.

Ако $Q_{i+1} \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(q_{i+1}, Q_{i+1}) = 0 < m$.

Ако $Q_{i+1} \equiv T_2$ и $\alpha(q_{i+1}, Q_{i+1}) = m \geq q_{i+1}$ и от Лема 3.18 $\Rightarrow Q_{i+2} \equiv T_4$ и в такъв случай $P_3 \equiv Q_{i+2} \equiv T_4$, тоест принцесата е била намерена и играта е приключила и в този случай са възможни най-много два последователни α елемента равни на m .

Забележка 3.23. В този случай, за да има два последователни α елемента равни на m , е необходимо да се завърши в позиция, в която играта е приключила. Тоест този случай може да се случи еднократно.

5 сл. $P_i \equiv T_3$ и $Q_i \equiv T_4$

$P_{i+1} \equiv T_2$ или $P_{i+1} \equiv T_4$.

Ако $P_{i+1} \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(m, M_{i+1}) = 0 < m$.

Ако $P_{i+1} \equiv T_2 \Rightarrow \alpha(m, M_{i+1}) = m \geq p_{i+1}$ и от Лема 3.18 $\Rightarrow P_3 \equiv T_4$ и в такъв случай $P_3 \equiv Q_{i+2} \equiv T_4$, тоест принцесата е била намерена и играта е приключила и в този случай са възможни най-много два последователни α елемента равни на m .

Забележка 3.24. В този случай, за да има два последователни α елемента равни на m е необходимо да се завърши в позиция, в която играта е приключила. Тоест този случай може да се случи еднократно.

Забележка 3.25. Очевидно **4 сл.** и **5 сл.** не могат да се случат едновременно, защото и при двата случая играта приключва.

Теорема 3.26. Ако x е броят на α елементите равни на m или $m+1$, а y е броят на α елементите по-малки от m , то: $x \leq y + 2$.

Доказателство. От горните пет случая знаем, че само на едно място в реда на α -ите може да се срещнат два последователни α елемента равни на m . Освен това от забележка 3.20 знаем, че α елемент равен на $m+1$ може да се срещне само веднъж в реда, а от Лема 3.21 и Лема 3.22 следва, че ако $m+1$ е в реда, то той ще е заобиколен от два елемента по-малки от m .

Нека разделим реда на α -ите на групи:

$$[X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_k, Y_k, X_{k+1}]$$

При това разделяне в групите X се съдържат елементи равни на m или $m+1$, а в групите Y , елементи по-малки от m . Знаем, че във всяка група има поне един елемент, освен в групите X_1 и X_{k+1} .

$$x = |X_1| + |X_2| + \dots + |X_k| + |X_{k+1}| \leq k + 2$$

$$y = |Y_1| + |Y_2| + \dots + |Y_k| \geq k$$

$$x \leq k + 2 \leq y + 2 \Rightarrow x \leq y + 2$$

□

Теорема 3.27. За n нечетно и $n > 4m$ е вярно, че: $f(n, m) \geq \frac{2n-4}{2m-1}$

Доказателство. От теорема 3.26 знаем, че $x \leq y + 2 \iff 2mx + (2m - 2)y - 2 \leq (2m - 1)x + (2m - 1)y$
 $2n - 4 \leq 2(m + 1 + m(x - 1) + (m - 1)y) - 4 = 2(1 + mx + (m - 1)y) - 4 = 2mx + (2m - 2)y - 2 \leq$
 $\leq (2m - 1)x + (2m - 1)y = (2m - 1)(x + y)$, тоест $\frac{2n-4}{2m-1} \leq x + y \leq f(n, m)$, с което стигаме до
 исканото:

$$f(n, m) \geq \frac{2n - 4}{2m - 1}$$

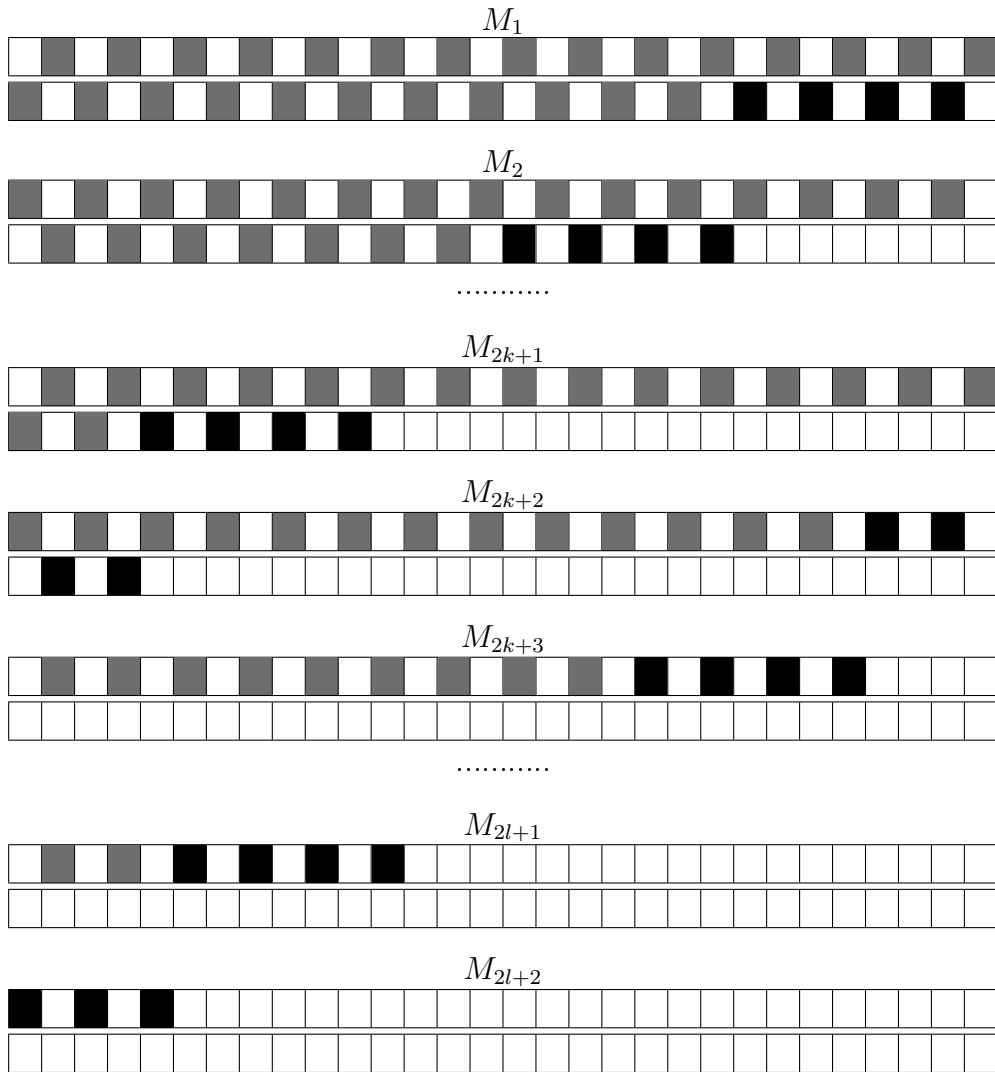
□

3.2 Горна граница

В тази част ще докажем, че $f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$ с някои изключения. За да направим това, ще покажем реализация за $m = 4$ в различните случаи за n (4 не играе роля в разсъжденията).

Стратегията в реализацията се състои в това да проверяваме клетки само от едната част до изчерпване на сивите клетки в нея, след което да преминем плавно към другата част (допустимо е да се проверяват клетки и в двете части единствено, когато при изпразването на едната част са останали някои допълнителни ходове).

Ще дадем реализация в само един случай, за да се добие представа каква точно е стратегията. Другите случаи са подобни, като разликата между тях е в какъв момент се прави преминаването между двете части и в какъв момент се изпразва и втората част.



Нека $\alpha(m, M_{2l+2}) = r$, като $r \geq 2$. Да разгледаме реда на α -ите:

$$[m, m-1, m, \dots, m, m-1, m, m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, r]$$

Виждаме, че броят на α елементите равни на $m - 1$ е x , то броят на α елементите равни на m е $x + 1$. Откъдето получаваме: $n = (x + 1)m + x(m - 1) + r \Rightarrow x = \frac{n-m-r}{2m-1}$

От друга страна броят на ходовете в реализацията е равен на $2x + 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(n, m) \leq 2x + 2 = \frac{2n-2m-2r+2(2m-1)}{2m-1} = \frac{2n+2m-2-2r}{2m-1} \leq \frac{2n+2m-6}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1} + \frac{2m-2}{2m-1} < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$$

Аналогично за другите случаи и стига́ме до извода, че:

$$f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1, \text{ освен при } n \equiv m+1 \pmod{2m-1}$$

Но $f(n, m) \geq \frac{2n-4}{2m-1} \Rightarrow f(n, m) = \left\lceil \frac{2n-4}{2m-1} \right\rceil$ за всяко $n \not\equiv m+1 \pmod{2m-1}$

При $n \equiv m + 1 \pmod{2m - 1}$ получаваме, че $\frac{2n-4}{2m-1} \leq f(n, m) \leq \frac{2n-4}{2m-1} + 1 + \frac{1}{2m-1}$ и знаейки, че $f(n, m)$ е цяло стигаме до извода, че $f(n, m)$ е равно на $\frac{2n-3}{2m-1}$ или $\frac{2n-3}{2m-1} + 1$.

$$f(n, m) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n-4}{2m-1} \right\rceil & \text{при } n \not\equiv m+1 \pmod{2m-1} \\ \frac{2n-3}{2m-1} \text{ или } \frac{2n-3}{2m-1} + 1 & \text{при } n \equiv m+1 \pmod{2m-1} \end{cases} \quad (3)$$

4 Стойности на $f(n, m)$ при $n \equiv m + 1 \pmod{2m - 1}$

Нека $n \equiv m + 1 \pmod{2m - 1}$ и да допуснем, че $f(n, m) = \frac{2n-3}{2m-1}$

4.1 Ако n е четно, $n = 2n_1$, $n_1 \in N$

Нека x е броят на α елементите равни на m , а y е броят на α елементите по-малки от m .

От теорема 3.13 знаем, че $x \leq y + 4$, а от допускането следва, че $x + y = \frac{2n-3}{2m-1}$. Да допуснем, че се достига равенство в горното неравенство. В такъв случай след заместване се получава:

$2y + 4 = \frac{2n-3}{2m-1}$, но числото от дясната страна е нечетно, за разлика от това от лявата, с което стигаме до противоречие. Тоест равенство не се достига $\Rightarrow x \leq y + 3$.

$$\frac{2n-3}{2^{m-1}} + 3 = x + y + 3 \geq 2x$$

$$n \leq xm + y(m-1) = x + (x+y)(m-1) = x + \frac{(2n-3)(m-1)}{2m-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2nm - n \leq x(2m - 1) + (2n - 3)(m - 1) = x(2m - 1) + 2nm - 3m - 2n + 3 \Rightarrow$$

$$n + 3m - 3 \leq x(2m - 1) \Rightarrow 2n - 3 + 6m - 3 \leq 2x(2m - 1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{2n-3}{2m-1} + 3 \leq 2x \leq \frac{2n-3}{2m-1} + 3$, откъдето следва, че исканото е възможно единствено, ако навсякъде по-горе неравенствата са били равенства, тоест α елементите равни на m са с три повече от тези равни на $m-1$.

4.1.1 Ако m е четно, $m = 2m_1$, $m_1 \in N$

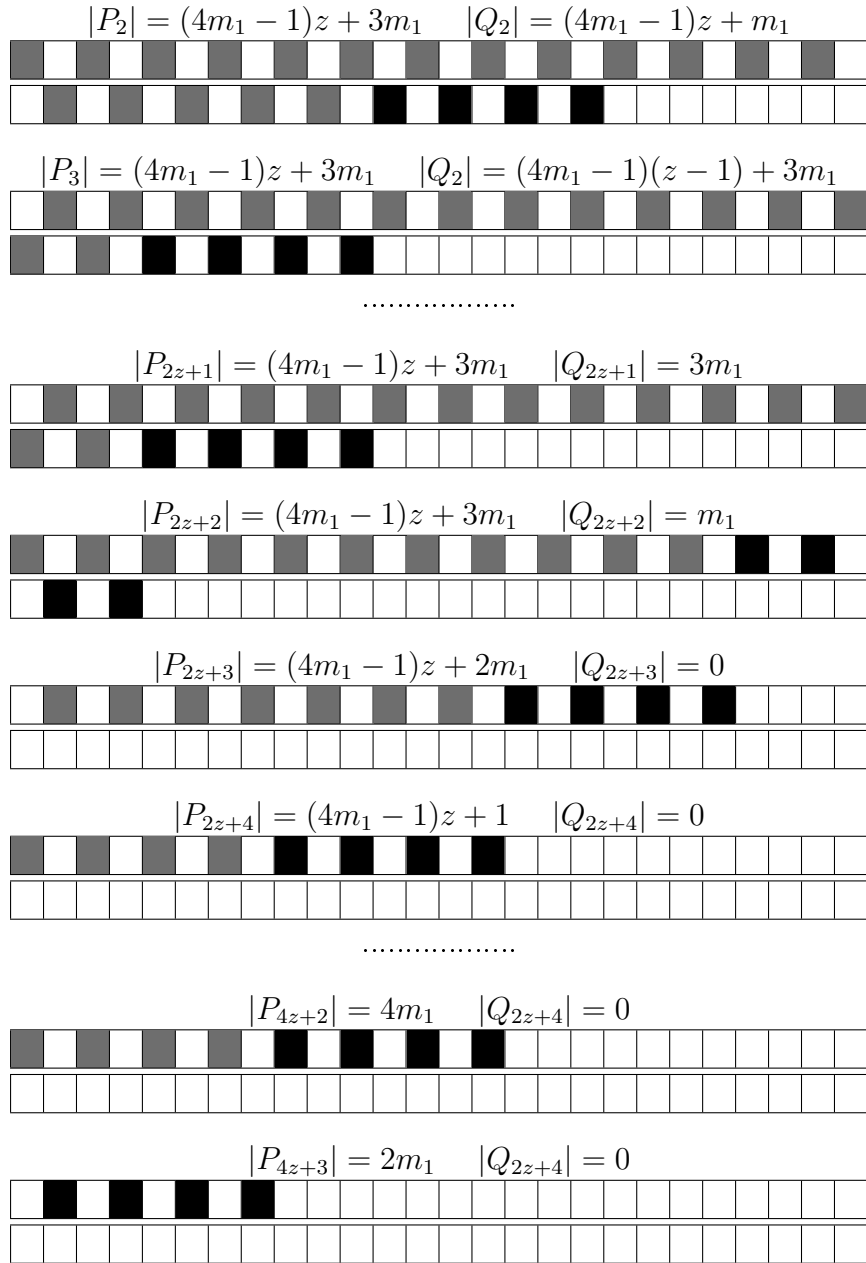
В този случай ще покажем реализация за $f(n, m) = \frac{2n-3}{2m-1}$.

$$n \equiv m + 1 \pmod{2m - 1} \Rightarrow 2n_1 \equiv 2m_1 + 1 \pmod{4m_1 - 1} \Rightarrow 2n_1 \equiv 6m_1 \pmod{4m_1 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 \equiv 3m_1 \pmod{4m_1 - 1} \Rightarrow n_1 = (4m_1 - 1)z + 3m_1$$

Оцветяваме в черно клетка, ако проверяваме дали принцесата е в нея.

$|P_1| = (4m_1 - 1)z + 3m_1 \quad |Q_1| = (4m_1 - 1)z + 3m_1$



$$f(n, m) = \frac{2n - 3}{2m - 1} = \frac{4n_1 - 3}{4m_1 - 1} = \frac{4(4m_1 - 1)z + 12m_1 - 3}{4m_1 - 1} = 4z + 3$$

По-горе показахме реализация с $4z + 3$ хода, тоест когато n и m са четни $f(n, m) = \lceil \frac{2n-4}{2m-1} \rceil$

4.1.2 Ако m е нечетно, $m = 2m_1 + 1$, $m_1 \in \mathbb{N}$

$$n \equiv m + 1 \pmod{2m - 1} \Rightarrow 2n_1 \equiv 2m_1 + 2 \pmod{4m_1 + 1} \Rightarrow n_1 \equiv m_1 + 1 \pmod{4m_1 + 1}$$

Да допуснем, че са възможни три последователни α елемента равни на m . Да разгледаме реда на α -ите.

$[..., m - 1, m, m, m, m - 1, ...]$ Нека броят на α елементите равни на m от лявата страна на трите m е x_1 , а броят на тези равни $m - 1$ е y_1 , аналогично за дясната страна — x_2 и y_2 . В секция 3.1.1, когато разглеждаме случаите за последователни α елемента равни на m се вижда,

че само в 2 сл. има три последователни m и само в 2 сл. има последователни m в средата на реда, откъдето следва, че от лявата страна на трете m нямаме никъде два последователни α елемента равни на m , тоест $x_1 \leq y_1$. От първото изречение в теорема 3.14 следва, че в дясната страна може да има най-много два последователни α елемента равни на m , тоест $x_2 \leq y_2 + 1$. Събирайки двете неравенства получаваме:

$x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2 + 1$, но от друга страна знаем, че $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ и замесвайки получаваме: $x_1 + x_2 \leq x_1 + x_2 + 1$, тоест е възможно да се отклоним с най-много едно от случая на равенство в горните две неравенства.

От следствие 3.11, следва че ако $\alpha(m, M_i) = \alpha(m, M_{i+1}) = \alpha(m, R_{i+2}) = m$, то $P_3 \equiv T_1$, а $Q_{i+2} \equiv T_3$ или обратното. Тоест $\alpha(m, M_1) + \alpha(m, M_2) + \dots + \alpha(m, M_i) + \alpha(m, M_{i+1}) = n_1$

1 сл. $x_1 = y_1$

Да разгледаме сумата по-горе по модул $4m_1 + 1$:

$\alpha(m, M_1) + \alpha(m, M_2) + \dots + \alpha(m, M_i) + \alpha(m, M_{i+1}) \equiv x_1 m + y_1(m-1) + 2m \equiv x_1(2m-1) + 2m \equiv x_1(4m_1 + 1) + 4m_1 + 2 \equiv 1 \pmod{4m_1 + 1}$, а от друга страна:
 $\alpha(m, M_1) + \alpha(m, M_2) + \dots + \alpha(m, M_i) + \alpha(m, M_{i+1}) \equiv n_1 \equiv m_1 + 1 \pmod{4m_1 + 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 \equiv m_1 + 1 \pmod{4m_1 + 1} \Rightarrow m_1 \equiv 0 \pmod{4m_1 + 1}$, но $0 < m_1 < 4m_1 + 1$, с което стигаме до противоречие.

2 сл. $x_1 + 1 = y_1$

$\alpha(m, M_1) + \alpha(m, M_2) + \dots + \alpha(m, M_i) + \alpha(m, M_{i+1}) \equiv x_1 m + y_1(m-1) + 2m \equiv x_1 m + (x_1 + 1)(m-1) + 2m \equiv$
 $\equiv x_1(2m-1) + 3m - 1 \equiv x_1(4m_1 + 1) + 6m_1 + 2 \equiv 2m_1 + 1 \pmod{4m_1 + 1}$, а от друга страна:
 $\alpha(m, M_1) + \alpha(m, M_2) + \dots + \alpha(m, M_i) + \alpha(m, M_{i+1}) \equiv n_1 \equiv m_1 + 1 \pmod{4m_1 + 1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2m_1 + 1 \equiv m_1 + 1 \pmod{4m_1 + 1} \Rightarrow m_1 \equiv 0 \pmod{4m_1 + 1}$, но $0 < m_1 < 4m_1 + 1$, с което стигаме до противоречие.

И двата случая водят до противоречие, тоест не са възможни три последователни α елемента равни на m . Тоест реда на α -ите ще изглежда така:

$$[m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m, m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m, m]$$

От следствие 3.12 знаем, че два последователни α елемента равни на m , в средата на реда, могат да се случат само ако $P_i \equiv T_1$ и $Q_i \equiv T_2$. От Лема 3.6 следва, че $p_i = 0 \Rightarrow P_{i+1} \equiv T_1$. Освен това от Лема 3.3 следва, че $Q_{i+2} \equiv T_3$, тоест между $i+1$ и $i+2$ ход едната част се изпразва $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha(m, M_1) + \alpha(m, M_2) + \dots + \alpha(m, M_i) + q_{i+1} = p_{i+1} + \alpha(m, M_{i+2}) + \alpha(m, M_{i+3}) + \dots + \alpha(m, M_k) \Rightarrow$
 $\Rightarrow m + m-1 + m + m-1 + \dots + m + m-1 + m + p_{i+1} = q_{i+1} + m-1 + m + \dots + m-1 + m + m \Rightarrow$
 $\Rightarrow (2m-1)u + p_{i+1} = q_{i+1} + (2m-1)v \Rightarrow (2m-1)(u-v) = q_{i+1} - p_{i+1} = m - 2p_{i+1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2m-1/m - 2p_{i+1}$, но $m - 2p_{i+1} \neq 0$, защото m е нечетно и $-(2m-1) < m - 2p_{i+1} < 2m-1$, с което стигаме до противоречие. Тоест в този случай $f(n, m) = \left\lceil \frac{2n-4}{2m-1} \right\rceil + 1$

4.2 Ако n е нечетно, $n = 2n_1 + 1$, $n_1 \in \mathbb{N}$

Нека x е броят на α елементите равни на m или $m+1$, а y е броят на α елементите по-малки от m .

От теорема 3.26 следва, че $x \leq y + 2$, а от допускането следва, че $x + y = \frac{2n-3}{2m-1}$. Да допуснем, че се достига равенство в горното неравенство. В такъв случай след заместване се получава: $2y + 2 = \frac{2n-3}{2m-1}$, но числото от дясната страна е нечетно, за разлика от това от лявата, с което стигаме до противоречие. Тоест равенство не се достига $\Rightarrow x \leq y + 1$. От забележка 3.20 следва, че α елемент равен на $m + 1$ може да се срещне най-много веднъж.

$\frac{2n-3}{2m-1} + 1 = x + y + 1 \geq 2x$
 $n \leq m + 1 + (x - 1)m + y(m - 1) = x + 1 + x(m - 1) + y(m - 1) = x + 1 + (x + y)(m - 1) \leq$
 $x + 1 + \frac{(2n-3)(m-1)}{2m-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2nm - n \leq x(2m - 1) + 2m - 1 + 2nm - 3m - 2n + 3 \Rightarrow n + m - 2 \leq x(2m - 1) \Rightarrow 2n - 3 + 2m - 1 \leq$
 $2x(2m - 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{2n-3}{2m-1} + 1 \leq 2x \leq \frac{2n-3}{2m-1} + 1$, откъдето следва, че исканото е възможно единствено, ако навсякъде по-горе неравенствата са били равенства, тоест имаме един α елемент равен на $m + 1$ и броят α елементи равни на m е равен на този рвни на $m - 1$. Да разгледаме реда на α -ите и ползвайки Лема 3.21 и Лема 3.22 разбираме, че ще изглежда така:

$[\dots, m - 1, m + 1, m - 1, \dots]$ Нека броят на α елементите равни на m от лявата страна на $m + 1$ е x_1 , а броят на тези равни $m - 1$ е y_1 , аналогично за дясната страна - x_2 и y_2 . От случаите за два последователни α елемента равни на m в секция 3.1.2 следва, че от лявата страна нямаме никъде два последователни α елемента равни на m , тоест $x_1 \leq y_1$, а от дясната може да има най-много два последователни, тоест $x_2 \leq y_2 + 1$. Събирайки двете неравенства получаваме: $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2 + 1$, но от друга страна знаем, че $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ и замесвайки получаваме: $x_1 + x_2 \leq x_1 + x_2 + 1$, тоест е възможно отклонение с най-много едно от случая на равенство в горните две неравенства.

От Лема 3.19 и от забележка 3.20 следва, че ако $\alpha(m, M_i) = m + 1$, то $P_{i+1} \equiv T_3$, а $Q_{i+1} \equiv T_2$, като $|Q_{i+1}| = n_1$, тоест до този момент броят на сивите клетки е намалял с $n_1 + 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha(m, M_1) + \alpha(m, M_2) + \dots + \alpha(m, M_i) = 1 + \alpha(m, M_{i+1}) + \alpha(m, M_{i+2}) + \dots + \alpha(m, M_k) \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1m + y_1(m - 1) + m + 1 = 1 + x_2m + y_2(m - 1) \Rightarrow x_1m + y_1(m - 1) + m = x_2m + y_2(m - 1)$

1 сл. $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$, замесвайки в горното равенство, получаваме:
 $x_1(2m - 1) + m = x_2(2m - 1) \Rightarrow 2m - 1/m$, но $0 < m < 2m - 1$, с което стигаме до противоречие.

2 сл. $x_1 + 1 = y_1$ и $x_2 = y_2 + 1$, замесвайки в горното равенство, получаваме:
 $x_1m + (x_1 + 1)(m - 1) + m = (y_2 + 1)m + y_2(m - 1) \Rightarrow (x_1 + 1)(2m - 1) = m + y_2(2m - 1) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2m - 1/m$ и аналогично стигаме до противоречие, тоест $f(n, m) = \left\lceil \frac{2n-4}{2m-1} \right\rceil + 1$.

Обобщавайки всичките разгледани случаи в тази секция, получаваме:

$$f(n, m) = \begin{cases} \frac{2n-3}{2m-1}, & \text{когато } n \text{ и } m \text{ са четни} \\ \frac{2n-3}{2m-1} + 1, & \text{когато поне едно от } n \text{ и } m \text{ е нечетно} \end{cases}$$

5 Стойности на $f(n, m)$ за $n \leq 4m$

Ако $1 \leq n \leq m$, очевидно $f(n, m) = 1$

Нека $n = m + 1$

Със сигурност ще остане поне едно квадратче, в което може да бъде принцесата в края на първия ден $\Rightarrow f(m + 1, m) \geq 2$

Нека $n = 2m + 1$ и $|P_1| = m + 1$ и $|Q_1| = m$.

Нека $p_1 = 0, q_1 = m; p_2 = m, q_2 = 0$.

В такъв случай: $|P_2| = m, |Q_2| = 0; |P_3| = |Q_3| = 0 \Rightarrow f(2m + 1, m) \leq 2$

Знаем, че $2 \leq f(m + 1, m) \leq f(2m + 1, m) \leq 2$, тоест ако $m + 1 \leq n \leq 2m + 1$, то $f(n, m) = 2$

Нека $n = 2m + 2$

От следствие 3.2 $\Rightarrow \alpha(m, M_1) \leq m$ и $\alpha(m, P_2 \cup Q_2) \leq m \Rightarrow |M_3| \geq 2 \Rightarrow f(n, m) \geq 3$

Нека $n = 3m - 1$

Ако $3m - 1$ е четно $\Rightarrow m = 2m_1 + 1 \Rightarrow n = 6m_1 + 2$, като $|P_1| = |Q_1| = 3m_1 + 1$

Нека $p_1 = 0, q_1 = 2m_1 + 1; p_2 = m_1 + 1, q_2 = m_1; p_3 = 2m_1 + 1, q_3 = 0$.

В такъв случай: $|P_2| = 3m_1 + 1, |Q_2| = m_1; |P_3| = 2m_1, |Q_3| = 0; |P_4| = |Q_4| = 0 \Rightarrow f(3m - 1, m) \leq 3$.

Ако $3m - 1$ е нечетно, тоест $m = 2m_1 \Rightarrow n = 6m_1 - 1$, като $|P_1| = 3m_1, |Q_1| = 3m_1 - 1$.

Нека $p_1 = 0, q_1 = 2m_1; p_2 = m_1, q_2 = m_1; p_3 = 2m_1, q_3 = 0$.

В такъв случай $|P_2| = 3m_1 - 1, |Q_2| = m_1; |P_3| = 2m_1, |Q_3| = 0; |P_4| = |Q_4| = 0 \Rightarrow f(3m - 1, m) \leq 3$.

Знаем, че $3 \leq f(2m + 2, m) \leq f(3m - 1, m) \leq 3$, тоест ако $2m + 2 \leq n \leq 3m - 1$, то $f(n, m) = 3$

Нека $n = 3m$

Ако m е четно, тоест $m = 2m_1 \Rightarrow n = 6m_1$, като $|P_1| = |Q_1| = 3m_1$

Нека $p_1 = 0, q_1 = 2m_1; p_2 = m_1, q_2 = m_1; p_3 = 2m_1, q_3 = 0$.

В такъв случай $|P_2| = 3m_1, |Q_2| = m_1; |P_3| = 2m_1, |Q_3| = 0; |P_4| = |Q_4| = 0 \Rightarrow f(3m, m) = 3$

Ако m е нечетно, тоест $m = 2m_1 + 1 \Rightarrow n = 6m_1 + 3$. Да допуснем, че е възможно $f(3m, m) = 3$

Ако в реда на α -ите присъства елементът $m + 1$. От Лема 3.19 следва, че ако това се случи то $P_i \equiv T_1$, а $Q_i \equiv T_2$, като при това $|Q_i| = m = 2m_1 + 1$. За да се стигне до тази ситуация ни трябва поне един ход. Също така знаем, че $P_{i+1} \equiv T_2$, като $|P_{i+1}| = 3m_1 + 1, Q_{i+1} \equiv T_4$. От тази позиция ни трябва поне 2 хода, за да приключим играта, защото не можем да елиминираме $3k + 1$ сиви клетки за един ход. Тоест общо ще ни трябва поне 4 хода, с което стигаме до противоречие.

Ако в реда на α -ите не присъства числото $m + 1$, то той трябва да изглежда така: $[m, m, m]$

Нека $P_1 \equiv T_1$ и $Q_1 \equiv T_2$, като $|P_1| = 3m_1 + 2, |Q_1| = 3m_1 + 1$

От Лема 3.18 $\Rightarrow \alpha(q_1, Q_1) \leq q_1 - 1 \Rightarrow \alpha(m, M_1) = \alpha(p_1, P_1) + \alpha(q_1, Q_1) \leq (p_1 + 1) + (q_1 - 1) = m$, като равенство се достига единствено при $\alpha(p_1, P_1) = p_1 + 1$, а от Лема 3.16 $\Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow q_1 = 2m_1 + 1 \Rightarrow Q_2 \not\equiv T_1$, а $P_2 \equiv T_2$, като $|P_2| = 3m_1 + 1 \Rightarrow \alpha(m, M_2) = \alpha(p_2, P_2) + \alpha(q_2, Q_2) \leq (p_2 - 1) + q_2 = m - 1$, с което стигаме до противоречие.

Тоест при $n = 3m$ и n нечетно $f(3m, m) \geq 4$

Нека $n = 3m + 1$

Ако $3m + 1$ е четно очевидно ще ни трябват поне четири хода, защото на всеки ход намаляваме броя на сивите квадратчета най-много с m .

Ако $3m + 1$ е нечетно и допуснем, че $f(3m + 1, m) = 3$, аналогично на случая $3m$ – нечетно стигаме до противоречие, с единствената разлика, че вече знаем елементът $m + 1$ се съдържа в реда на α -ите и не е нужно да се разглеждат два случая.

Тоест $f(3m + 1, m) \geq 4$.

Нека $n = 4m$

Нека $p_1 = 0, q_1 = m; p_2 = 0, q_2 = m; p_3 = m, q_3 = 0; p_4 = m, q_4 = 0$.

В такъв случай: $|P_2| = 2m, |Q_2| = m; |P_3| = 2m, |Q_3| = 0; |P_4| = m, |Q_4| = 0; |P_5| = |Q_5| = 0 \Rightarrow f(4m, m) \leq 4$

Знаем, че $4 \leq f(3m + 1, m) \leq f(4m, m) \leq 4$, тоест ако $3m + 1 \leq n \leq 4m$, то $f(n, m) = 4$.

Комбинирайки горните твърдения, получаваме:

$$f(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{при } 1 \leq n \leq m \\ 2, & \text{при } m + 1 \leq n \leq 2m + 1 \\ 3, & \text{при } 2m + 2 \leq n \leq 3m - 1 \\ 4, & \text{при } 3m + 1 \leq n \leq 4m \end{cases} \quad \text{и} \quad f(3m, m) = \begin{cases} 3, & \text{ако } m \text{ е четно} \\ 4, & \text{ако } m \text{ е нечетно} \end{cases} \quad (4)$$

6 Обща формула за $f(n, m)$

$$f(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{ако } n \leq m \\ \left\lceil \frac{f(n, 1)}{2m-1} \right\rceil, & \text{ако } n > m \text{ и } n \not\equiv m + 1 \pmod{2m-1} \\ \left\lceil \frac{f(n, 1)}{2m-1} \right\rceil, & \text{ако } n \text{ и } m \text{ четни и } n \equiv m + 1 \pmod{2m-1} \\ \left\lceil \frac{f(n, 1)}{2m-1} \right\rceil + 1, & \text{ако поне едно то } n \text{ и } m \text{ е нечетно и } n \equiv m + 1 \pmod{2m-1} \end{cases}$$

7 Заключение и бъдещо развитие

В този проект ние изследвахме по-задълбочено функцията $f(n, m)$. Досега бяха известни резултати само за $f(n, 1)$, а ние успяхме да пресметнем стойността на $f(n, m)$.

В бъдещи статии по тази тема бихме искали да изследваме съществуването на стратегия за откриване на принцесата в по-сложни конфигурации.

Литература

- [1] Емил Колев Николай Белухов, Search for a moving target in a graph. *Fifteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*, стр. 47-52, 2016 г.
- [2] Gary Antonick, The princess problem, *Wordplay. The crossword Blog of the New York Times*, 2014 г.
- [3] Асел Исмолдаева, Как да намерим Принцеса или Търсене на движеща се цел в граф. *Седмнадесета ученическа конференция*, 13-15 януари 2017 г.