

ДВАДЕСЕТА УЧЕНИЧЕСКА КОНФЕРЕНЦИЯ УК'20

ТЕМА НА ПРОЕКТА:

Оптимални стратегии за намиране
на принцеса в линеен граф

Автор:

Ангел Райчев и Димитър Русев

София, България

125 СУ "Боян Пенев", 10 клас

E-mail: angel11drakon@gmail.com

Научен ръководител:

Димитър Димитров, учител по математика в 125 СУ

Съдържание

1	Увод	3
2	Функцията $f(n, m)$	3
3	Свойства на функцията $f(n, m)$	3
3.1	Монотонност на $f(n, m)$ относно n	3
4	Обща формула за $f(n, m)$	5
4.1	Долна граница за $f(n, m)$	5
4.1.1	Ако n е четно	5
4.1.2	Ако n е нечетно	7
4.2	Горна граница	9
4.2.1	Ако n е четно	9
4.2.2	Ако n е нечетно	13
5	Стойности на $f(n, m)$ за $n \leq 4m$ и $m > 1$	17
6	Стойности на $f(n, 1)$	18
6.1	Ако n е четно	18
6.2	Ако n е нечетно	19
7	Връзка между $f(n, m)$ и $f(n, 1)$	20
8	Заключение и бъдещо развитие	20

Абстракт

Разглеждаме линеен граф с n върха и принцеса, която се намира в произволен връх. Опитваме се да намерим принцесата с минимален брой ходове, като всеки ход се състои от проверка на m върха и преместването на принцесата в съседен връх.

В тази статия дефинираме функцията $f(n, m)$, която представлява минималният брой ходове, след които сме сигурни, че ще открием принцесата. Намираме стойността на функцията изразена чрез n и m и правим връзка между $f(n, m)$ и $f(n, 1)$. Освен това доказваме, че функцията е монотонно растяща относно броя на върховете n .

1 Увод

Разглеждаме линеен граф с n върха и принцеса, която се намира в произволен връх. Опитваме се да намерим принцесата с минимален брой ходове, като всеки ход се състои от проверка на m върха и преместването на принцесата в съседен връх.

В тази статия дефинираме функцията $f(n, m)$, която представлява минималният брой ходове, след които сме сигурни, че ще открием принцесата. Намираме стойността на функцията изразена чрез n и m и правим връзка между $f(n, m)$ и $f(n, 1)$. Освен това доказваме, че функцията е монотонно растяща относно броя на върховете n .

Задачата е поставена за пръв път през 2014 от Gary Antonick [2].

Емил Колев и Николай Белухов доказват, че в линеен граф при $m = 1$ съществува стратегия за намирането на принцесата. Те също характеризират всички графи, за които съществува стратегия при $m = 1$ [1].

В тази статия използваме идеята за страти на граф, която и Емил Колев и Николай Белухов използват. Те представляват начин на оцветяване на върховете на граф, така че всички съседни върхове са от различен цвят [1].

2 Функцията $f(n, m)$

Дефинираме функцията $f(n, m)$, която приема стойност минималния брой ходове, които са нужни за откриването на принцесата с проверка на m върха на всеки ход в линеен граф с n върха.

Очевидно, $f(n, m) \leq g(n, m)$ за всяка друга стратегия g .

Ще приемем, че $n, m \in \mathbb{N}$ и $n > m$, защото $f(n, m) = 1$ за всички $n \leq m$. Нека също $f(n, m) = \infty$, когато не съществува стратегия за откриване на принцесата.

Емил Колев и Николай Белухов доказват, че $f(n, 1) = 2n - 4$ за всяко $n \geq 3$

3 Свойства на функцията $f(n, m)$

3.1 Монотонност на $f(n, m)$ относно n

Ще докажем, че $f(n, m)$ е растяща спрямо n .

Теорема 3.1.

$$n_1 \leq n_2 \iff f(n_1, m) \leq f(n_2, m) \neq \infty$$

Доказателство.

Нека A и B са линейни графи с n_1 и n_2 върха съответно и $B' \subset B$ е изоморфичен на A .

$$|A| = n_1, \quad |B| = n_2, \quad A \equiv B' \subseteq B$$

Разбиваме графа B на B' и $B \setminus B'$, като $B = B' \cup (B \setminus B')$.

Ще разгледаме някоя стратегия g за B и ще направим съответствие на ходовете в B' и $B \setminus B'$ и ходовете за друга стратегия g' за A .

Нека избраните върхове за ход номер i в стратегията g е множеството Y_i , а за съответната стратегия за A - g' е множеството Y'_i . Ясно е, че $|B' \cap Y_i| + |(B \setminus B') \cap Y_i| = m$

За всеки ход напълно или частично в B' за g ще изпълняваме ходове в A , а за ходове напълно в $B \setminus B'$ няма да изпълняваме ходове в A . Ако даден ход за g е само частично в B' няма да се възползваме от оставащите $m - |B' \cap Y_i|$ хода и ще играем в произволни върхове с тях.

$$|B' \cap Y_i| \geq 1 \Rightarrow Y'_i = (B' \cap Y_i) \cup \text{произволни ходове в } A \text{ на брой } m - |B' \cap Y_i|$$

Нека разгледаме случаите, когато в стратегията g правим няколко последователни ходове изцяло в $B \setminus B'$.

Нека T_i е множеството на върхове, където може да се намира принцесата след ход i за g , а T'_i за g' . Тоест сме сигурни, че принцесата не се намира в нито един връх от $B \setminus T_i$ след i -тия ход.

Дефинираме функцията $N(T_i, x)$ като множеството от върхове, където принцесата може да се намира след x хода.

След четен брой ходове принцесата няма да се премести в другата страта и $T_{i+x} \subseteq N(T_i, x)$, а след нечетен брой, тя ще се премести в другата страта и не е сигурно дали $T_{i+x} \subseteq N(T_i, x)$.

$$T_{i+2k} \subseteq N(T_i, 2k), \text{ но } T_{i+2k+1} \not\subseteq N(T_i, 2k+1)$$

Това свойство се запазва и за позициите само в B' :

$$(T_{i+2k} \cap B') \subseteq N(T_i, 2k) \cap B', \text{ но } (T_{i+2k+1} \cap B') \not\subseteq N(T_i, 2k+1) \cap B'$$

Разглеждаме случая, когато има няколко последователни хода в $B \setminus B'$:

$$|B' \cap Y_i| = 0 \Rightarrow (T_{i+2k} \cap B') \equiv N(T_i, 2k) \cap B'$$

Но след нечетен брой ходове, принцесата се премества в другата страта:

$$|B' \cap Y_i| = 0 \Rightarrow (T_{i+2k+1} \cap B') \not\equiv N(T_i, 2k+1) \cap B'$$

Ако за ходове изцяло в $B \setminus B'$ не правим ходове в A , то:

$$T'_{i+1} \subseteq (N(T_i, x) \cap B') \not\equiv (T_{i+x} \cap B'), \text{ за } 2 \nmid x$$

Можем да направим произволен ход в A , така че при нечетно x да избегнем този проблем:

$$T'_{i+2} = N(T'_{i+1}, 1) \cap B' = N(N(T_i, 2k+1) \cap B', 1) \cap B' = (N(T_i, 2k+2) \cap B') \subseteq (T_{i+2k+1} \cap B')$$

А след четен брой ходове:

$$T'_{i+1} = (N(T_i, 2k) \cap B') \subseteq (T_{i+2k} \cap B')$$

Тъй като, $B' \subseteq B$ и за всеки 2 или повече ходове в $B \setminus B'$ спестяваме ходове в стратегията за A , то:

Ходове в A = Ходове в B' + бонус произволни ходове $\leq$ Ходове в B

Можем да изберем $g(n_2, m) = f(n_2, m)$, а $f(n_1, m) \leq g'(n_1, m)$ по дефиниция, то:

$$f(n_1, m) \leq g'(n_1, m) \leq g(n_2, m) = f(n_2, m)$$

□

4 Обща формула за $f(n, m)$

В тази част ще изразим $f(n, m)$ чрез n и m за $n > 4m$ и $m > 1$

За удобство ще представим графа като таблица $n \times 1$. Ще оцветяваме едно квадратче в: сиво, ако има шанс принцесата да е в него, в бяло, ако принцесата не е в него и в черно, ако проверяваме дали принцесата е в него на съответния ход. Забелязваме, че ако принцесата се намира на четна позиция, то на следващия ден ще се намира на четна и обратното, тоест можем да разделим таблицата на две части (страти), в зависимост от това дали принцесата е започнала от квадратче на четна или на нечетна позиция.



Дефиниция 4.1. Нека T е множество от клетки, в които може да бъде принцесата. Нека проверим t от тях. Вече знаем, че принцесата не е в никоя от проверените клетки, тоест множеството T е намаляло с t клетки. Нека новополученото множество е X . Разглеждаме всички съседни клетки в X и нека това е множеството T' — клетките, в които принцесата може да се намира на следващия ден.

$$\alpha(t, T) = \max(|T| - |T'|)$$

Дефиниция 4.2. Ще обозначаваме реда на α -ите чрез: $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ като с x_i обозначаваме стойността на $\alpha(m, P_i \cup Q_i)$ на i -ят ден, където P и Q са позициите на двете страти.

4.1 Долна граница за $f(n, m)$

В тази част ще докажем, че $f(n, m) \geq \frac{25-4}{2m-1}$

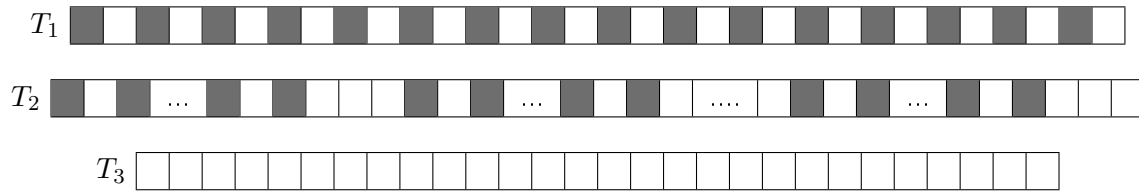
4.1.1 Ако n е четно

Лема 4.1. $\alpha(t, T) \leq t$

Доказателство. $|X| = |T| - t$

Б.О.О. Множеството X съдържа клетки на нечетни позиции, тогава всяка клетка има съсед вдясно, тоест множеството T' съдържа поне толкова клетки колкото X . Оттук получаваме неравенството: $|T'| \geq |X| = |T| - t$, тоест $|T| - |T'| \leq t$ или $\alpha(t, T) \leq t$ $\square$

Нека разгледаме всички възможни позиции на клетките във всяка от двете страти.



Лема 4.2. Ако $\alpha(t, T_2) = t$ и $\alpha(t', T'_2) = t'$, то $T_2'' \equiv T_3$

Доказателство. Означаваме с $B_0, B_1, \dots, B_w$ групите от квадратчета в T_2 , а с $b_0, b_1, \dots, b_w$ броя на проверените квадратчета във всяка от тях.



$$\begin{array}{ccc}
B_0 & B_1 & B_w \\
\text{За всяко } i \geq 1: & & \\
\alpha(b_i, B_i) = \begin{cases} b_i, & \text{ако } b_i = |B_i| \\ b_i - 1, & \text{ако } b_i < |B_i| \end{cases} & & (1)
\end{array}$$

$$\alpha(t, T_2) = t \text{ единствено, ако за всяко } i \geq 1 \quad b_i = |B_i|$$

$$\begin{aligned}
b_0 &\leq m - (b_1 + b_2 + \dots + b_w) = m - (|B_1| + |B_2| + \dots + |B_w|) = m - (|T_2| - |B_0|) \\
|T_2'| &= |B_0'| = |B_0| - b_0 \geq |B_0| - m + |T_2| - |B_0| = |T_2| - m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Ако } T_2' \equiv T_3 \Rightarrow T_2'' \equiv T_3, \text{ ако ли не } T_2' \equiv T_2 \\
&|B_0'| = 0 \Rightarrow b_0' = 0 \quad t' = b_0' + b_1' + \dots + b_v' = |B_1'| + |B_2'| + \dots + |B_v'| = |T_2'| \quad \alpha(t', T_2') = t' = |T_2'| \Rightarrow T_2'' \equiv T_3 \quad \square
\end{aligned}$$

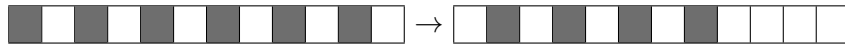
$$\text{Дефиниция 4.3. } g(T_2) = |B_1| + |B_2| + \dots + |B_w|$$

$$\text{Лема 4.3. Ако } g(T_2) > m, \text{ то } \alpha(t, T_2) \leq t - 1$$

Доказателство. Да допуснем, че $\alpha(t, T_2) = t$. За да се случи това, то трябва $b_i = |B_i|$ за всяко $i \geq 1$
 $m \geq t = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_w \geq |B_1| + |B_2| + \dots + |B_w| = g(T_2) > m$
От последното получаваме, че $m > m$, което е невъзможно. $\square$

$$\text{Лема 4.4. Ако } \alpha(t, T_1) = t > 0, \text{ то } \alpha(t', T_1') \leq t' - 1.$$

Доказателство. Единственият начин да се случи $\alpha(t, T_1) = t$ е:



$$T_1' \equiv T_2 \quad g(T_1') = |T_1'| > m \text{ От Лема 4.3. } \Rightarrow \alpha(t', T_1') \leq t' - 1 \quad \square$$

Нека позициите на двете страти са P и Q , а проверените квадратчета в тях са p и q на брой. Ще изследваме случаите, в които имаме няколко последователни α равни на m .

$$1 \text{ сл. } P \equiv T_1 \text{ и } Q \equiv T_1$$

За да може $\alpha(m, P \cup Q) = m$, то $\alpha(p, P) = p$ и $\alpha(q, Q) = q$

Поне едно от p и q е по-голямо от нула. Нека $p > 0$

$$\text{От Лема 4.4. } \Rightarrow \alpha(p', P') \leq p' - 1$$

$$2 \text{ сл. } P \equiv T_1 \text{ и } Q \equiv T_2$$

Ще докажем, че не е възможно да се случат 4 последователни α равни на m .

Допускаме противното:

$\alpha(m, P \cup Q) = m$ и $\alpha(m, P' \cup Q') = m \Rightarrow p = 0$ и $p' = 0$, защото в противен случай от Лема 4.4. ще стигнем до противоречие. Също така от Лема 3.2. $\Rightarrow Q'' \equiv T_3$. Знаем, че $P'' \equiv T_1$ и $Q'' \equiv T_3 \Rightarrow p'' = m > 0$ и от Лема 4.4. стигаме до противоречие.

Тоест в този случай са възможни най-много 3 последователни α -и равни на m .

$$3 \text{ сл. } P \equiv T_1 \text{ и } Q \equiv T_3 \Rightarrow p = m > 0 \text{ и от Лема 4.4. } \Rightarrow \alpha(p', P') \leq p' - 1$$

$$4 \text{ сл. } P \equiv T_2 \text{ и } Q \equiv T_2$$

Ще докажем, че не е възможно да се случат 3 последователни α равни на m .

Допускаме противното:

От Лема 4.2. $\Rightarrow P'' \equiv Q'' \equiv T_3$, тоест $\alpha(m, P'' \cup Q'') = 0$, което е невъзможно.

Тоест в този случай са възможни най-много 2 последователни α равни на m .

5 сл. $P \equiv T_2$ и $Q \equiv T_3$

Ще докажем, че не е възможно да се случат 3 последователни α равни на m .

Допускаме противното:

От Лема 4.2. $\Rightarrow P'' \equiv Q'' \equiv T_3$, тоест $\alpha(m, P'' \cup Q'') = 0$, което е невъзможно.

Тоест в този случай са възможни най-много 2 последователни α равни на m .

Виждаме, че само в 2 сл., 4 сл. и 5 сл. имаме няколко последователни α равни на m , като при това те могат да се случат еднократно и освен това 4 сл. и 5 сл. не могат да се случат едновременно. Тоест само на две места може да се случи исканото, като в единия случай имаме 2 последователни α равни на m , а в другия – 3. Тоест записвайки реда на α -ите в играта, броят на числата m ще е с най-много 4 повече от броя на останалите числа. Нека броят на числата m е x , а на останалите числа е y .

Знаем, че $x \leq y + 4 \iff 2mx + (2m - 2)y - 4 \leq (2m - 1)x + (2m - 1)y$

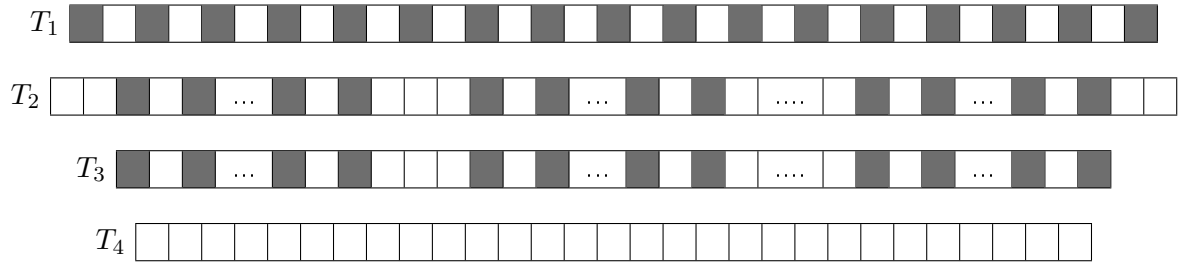
$2n - 4 \leq 2(mx + (m - 1)y) - 4 = 2mx + (2m - 2)y - 4 \leq (2m - 1)x + (2m - 1)y = (2m - 1)(x + y)$

Тоест $\frac{2n-4}{2m-1} \leq x + y \leq f(n, m)$, с което стигаме до исканото:

$$\frac{2n-4}{2m-1} \leq f(n, m)$$

4.1.2 Ако n е нечетно

Нека разгледаме всички възможни позиции на клетките във всяка от двете страти.



Лема 4.5. $\alpha(t, T_i) = t + 1$ единствено при $t = 0$ и $i = 1$,

Доказателство. Нека X е множеството T_i без проверените t клетки. Първо ще докажем, че $i = 1$.

Ако $i = 2$ всяка от клетките в X има съсед вляво, тоест $|T'| \geq |X| = |T| - t \Rightarrow t \geq |T| - |T'| = \alpha(t, T_2)$

Ако $i = 3$ нека означим групите от квадратчета в X с $C_0, C_1, \dots, C_w$. Всички квадратчета в групите $C_0, C_1, \dots, C_{w-1}$ има съсед вдясно, докато тези в C_w имат съсед вляво, тоест $|T'| \geq |X| \Rightarrow t \geq \alpha(t, T_2)$

Ако $i = 4 \Rightarrow \alpha(t, T_4) = 0 < t + 1$. Тоест единствената възможност исканото да се случи е при $i = 1$.

Ако $i = 1$ и $t > 0 \Rightarrow X \equiv T_2$ или $X \equiv T_3$, но в такъв случай $|X| \leq |T'_i|$ (заместваем $t = 0$ в случаите $i = 2$ и $i = 3$), тоест $\alpha(t, T'_i) \leq t$. Остана единствено случая, при който $i = 1$ и $t = 0$ $\alpha(0, T_1) = 1$

Освен това доказахме и нещо по-силно: За всички други i и t $\alpha(t, T_i) \leq t$ □

Лема 4.6. $\alpha(t, T_2) = t$ единствено, когато $T'_2 \equiv T_4$

Доказателство. Ще е достатъчно да докажем, че $t = |T_2|$

Означаваме с $A_1, \dots, A_w$ групите от квадратчета в T_2 , а с $a_1, a_2, \dots, a_w$ броя на проверените квадратчета във всяка от тях. $\alpha(a_i, A_i) = a_i$, ако $a_i = |A_i|$ и $\alpha(a_i, A_i) \leq a_i - 1$, ако $a_i \neq |A_i|$

$\alpha(t, T_2) = \alpha(a_1, A_1) + \alpha(a_2, A_2) + \dots + \alpha(a_w, A_w) \leq a_1 + a_2 + \dots + a_w = t$, като равенство се достига при $a_i = |A_i|$, за всяко i , тоест $t = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_w| = |T_2|$ □

Нека позициите на двете страти са P и Q , а проверените квадратчета в тях са p и q на брой. Ще изследваме случаите, в които имаме α равно на $m + 1$.

От Лема 4.5. следва, че ако това се случи, със сигурност едната от двете страти ще е в позиция T_1 и броят на проверените квадратчета в нея ще е 0. Нека тази страта е P , тоест $p = 0 \Rightarrow q = m \Rightarrow \alpha(m, Q) = m$.

$Q \neq T_1, T_3$, защото в противен случай и двете страти ще имат квадратчета на нечетна позиция. Също така $Q \neq T_4$, защото $\alpha(m, T_4) = 0 < m$. Тоест $Q \equiv T_2$, но $\alpha(m, Q) = m$ и от Лема 4.6. $\Rightarrow T'_2 \equiv T_4$. Тоест α равно на $m + 1$ може да се случи еднократно и то само, ако $P \equiv T_1$, $Q \equiv T_2$ и $m = |T_2|$.

Лема 4.7. Ако $\alpha(m, P' \cup Q') = m + 1$, то $\alpha(m, P \cup Q) \leq m - 1$

Доказателство. Нека $P' \equiv T_1$, а $Q' \equiv T_2$.

$$P' \equiv T_1 \Rightarrow \alpha(p, P) \leq -1 \quad |Q'| = m \Rightarrow Q \neq T_1 \Rightarrow \alpha(q, Q) \leq q \leq m$$

$$\alpha(m, P \cup Q) = \alpha(p, P) + \alpha(q, Q) \leq m - 1$$

□

Лема 4.8. Ако $\alpha(m, P \cup Q) = m + 1$, то $\alpha(m, P' \cup Q') \leq m - 1$

Доказателство. Нека $P \equiv T_1$, а $Q \equiv T_2$.

$$P' \equiv T_2 \text{ и } |P'| > m \Rightarrow P' \neq T_4 \text{ и от Лема 4.6. } \Rightarrow \alpha(p', P') \leq p' - 1 \leq m - 1$$

$$\text{Освен това } Q' \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(q', Q') = 0 \quad \alpha(m, P \cup Q) = \alpha(p, P) + \alpha(q, Q) \leq m - 1$$

□

Ще изследваме случаите, в които имаме 2 последователни α равни на m .

1 сл. Ако някоя от двете страти е в позиция T_1 .

Нека $P \equiv T_1 \Rightarrow P' \equiv T_2$ и $|P'| > m \Rightarrow P'' \neq T_4$ от Лема 4.6. $\Rightarrow \alpha(p', P') \leq p' - 1 \Rightarrow \alpha(q', Q') \geq q' + 1 \Rightarrow Q' \equiv T_1 \Rightarrow \alpha(q, Q) \leq -1 \Rightarrow \alpha(p, P) \geq m + 1 \Rightarrow p \geq m + 1$, но това е невъзможно.

2 сл. $P \equiv T_2$ и $Q \equiv T_2$

$\alpha(m, P \cup Q) = \alpha(p, P) + \alpha(q, Q) \leq p + q = m \Rightarrow \alpha(p, P) = p$ и $\alpha(q, Q) = q$ и от Лема 4.6. $\Rightarrow P' \equiv T_4$ и $Q' \equiv T_4$, но в такъв случай $\alpha(m, P' \cup Q') = 0 < m$

3 сл. $P \equiv T_2$, а $Q \equiv T_4$

$\alpha(q, Q) = 0 \Rightarrow \alpha(p, P) = m \geq p$ и от Лема 4.6. $\Rightarrow P' \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(m, P' \cup Q') = 0 < m$

4 сл. $P \equiv T_2$ и $Q \equiv T_3$

$\alpha(m, P \cup Q) = \alpha(p, P) + \alpha(q, Q) \leq p + q = m \Rightarrow \alpha(p, P) = p$ и от Лема 4.6. $\Rightarrow P' \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(p', P') = 0 \Rightarrow \alpha(q', Q') = m$, освен това $Q' \equiv T_2$ или $Q' \equiv T_4$. Ако $Q' \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(q', Q') = 0 < m$. Ако $Q' \equiv T_2$ и $\alpha(q', Q') = m$ от Лема 4.6. $\Rightarrow Q'' \equiv T_4$

5 сл. $P \equiv T_3$ и $Q \equiv T_4$

$P' \equiv T_2$ или $P' \equiv T_4$. Ако $P' \equiv T_4 \Rightarrow \alpha(m, P' \cup Q') = 0 < m$. Ако $P' \equiv T_2 \Rightarrow \alpha(m, P' \cup Q') \leq p' \leq m$. При достигане на равенството от Лема 4.6. $\Rightarrow P'' \equiv T_4$

Само в 4 сл. и 5 сл. могат да се случат 2 последователни α равни на m , като при това те могат да се случат еднократно и двете не могат да се случат едновременно.

Съединявайки: разсъжденията за α равно на $m + 1$, Лема 4.7., Лема 4.8. и разсъжденията за 2 последователни α равни на m , получаваме, че като запишем реда на α -ите в играта, броят на числата m и $m + 1$ взети заедно ще е с най-много 2 по-голям от броя на останалите числа. Освен това знаем, че $m + 1$ може да се срещне най-много веднъж в реда. Нека броят на числата m и $m + 1$ е x , а на

останалите числа е y .

Знаем, че $x \leq y + 2 \iff 2mx + (2m - 2)y - 2 \leq (2m - 1)x + (2m - 1)y$
 $2n - 4 \leq 2(m + 1 + m(x - 1) + (m - 1)y) - 4 = 2(1 + mx + (m - 1)y) - 4 = 2mx + (2m - 2)y - 2 \leq$
 $\leq (2m - 1)x + (2m - 1)y = (2m - 1)(x + y)$, тоест $\frac{2n-4}{2m-1} \leq x + y \leq f(n, m)$, с което стигаме до исканото:

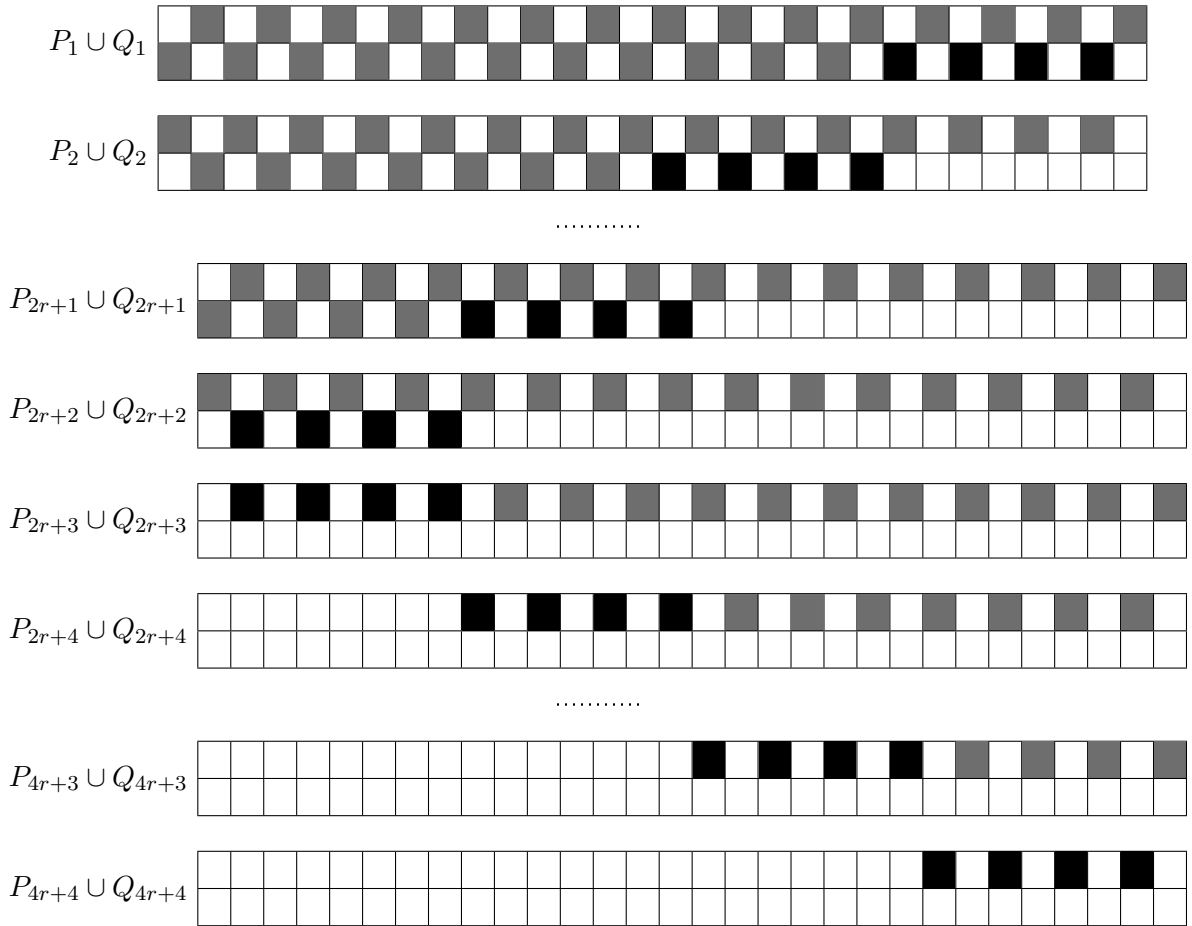
$$\frac{2n - 4}{2m - 1} \leq f(n, m)$$

4.2 Горна граница

В тази част ще докажем, че $f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$, с някои изключения. За да направим това, ще покажем реализация за $m = 4$ в различните случаи за n (4 не игра роля в разсъжденията).

4.2.1 Ако n е четно

1 сл.



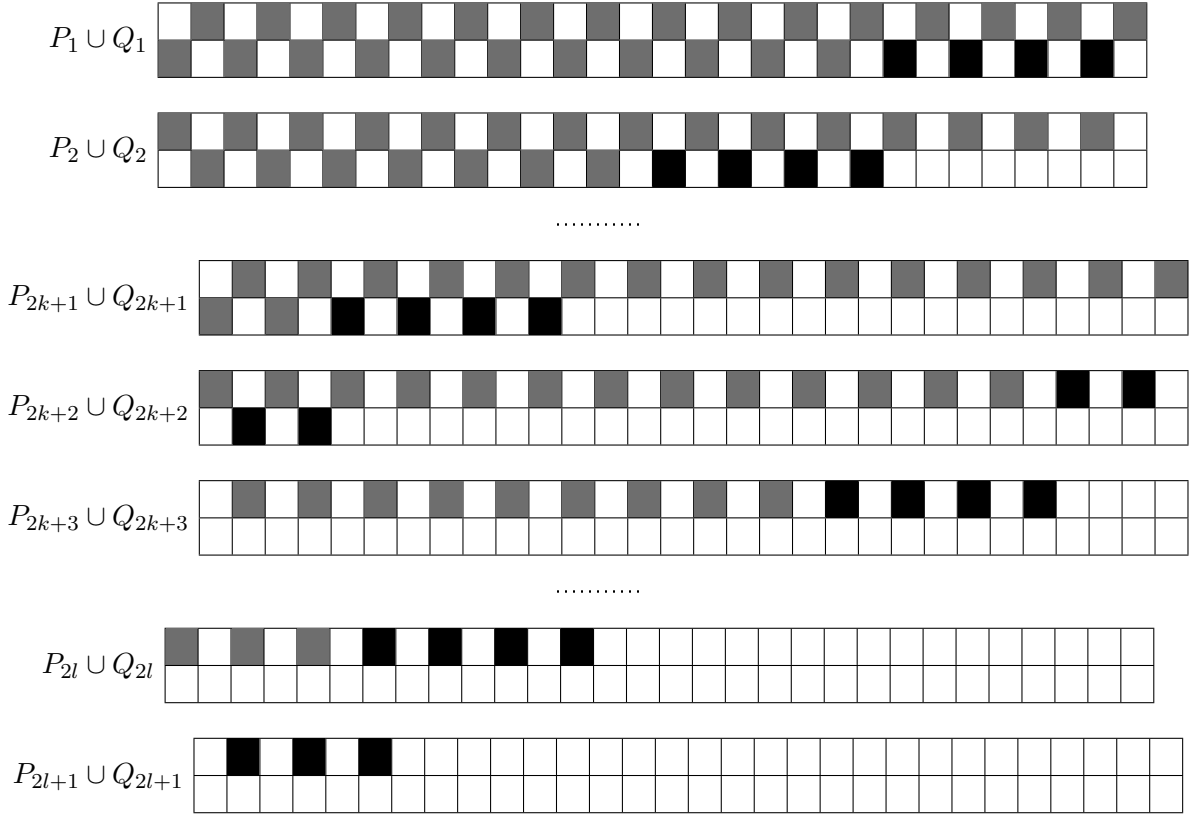
$$(m, m - 1, m, \dots, m, m - 1, m, m, m, m - 1, m, \dots, m, m - 1, m, m)$$

$$n = (x + 4)m + x(m - 1) \Rightarrow x = \frac{n-4m}{2m-1}$$

$$f(n, m) \leq 2x + 4 = \frac{2n-8+4(2m-1)}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1}$$

$$n \equiv 4m \equiv 2 \pmod{2m-1}$$

2.1 сл.



$$\alpha(m, P_{2l+1} \cup Q_{2l+1}) = r_1 \quad r \geq 1$$

$$(m, m-1, m, \dots, m, m-1, m, m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m, r)$$

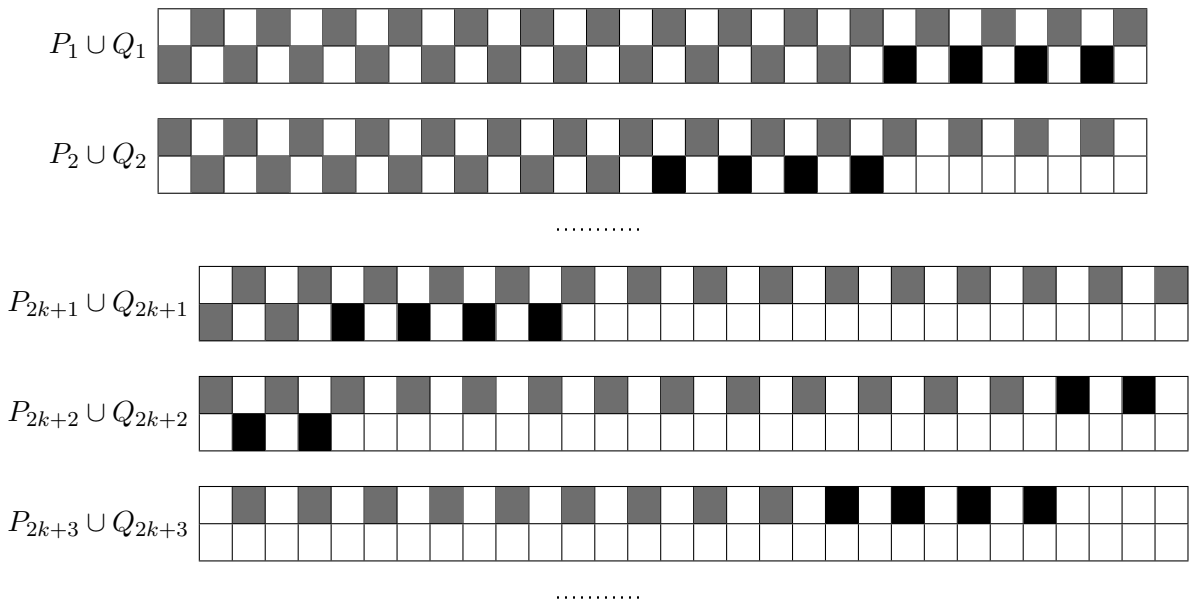
$$n = (x+2)m + x(m-1) + r \Rightarrow x = \frac{n-2m-r}{2m-1}$$

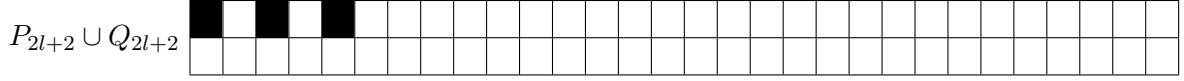
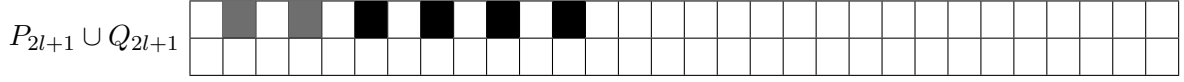
$$f(n, m) \leq 2x+3 = \frac{2n-4m-2r+3(2m-1)}{2m-1} = \frac{2n+2m-3-2r}{2m-1} \leq \frac{2n+2m-3-2}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1} + 1$$

Ако $r = 1 \Rightarrow n = (2m-1)l + 2m + 1 \equiv 2 \pmod{2m-1}$, което е невъзможно, защото съвпада с 1 сл.
 Тоест горното неравенство е строго.

$$f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$$

2.2 сл.





$$\alpha(m, P_{2l+2} \cup Q_{2l+2}) = r \quad r \geq 2$$

$$(m, m-1, m, \dots, m, m-1, m, m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, r)$$

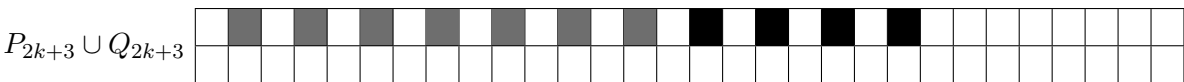
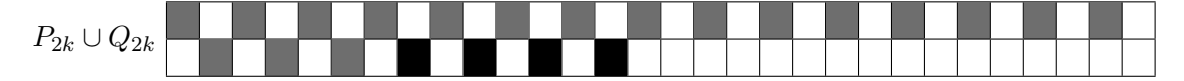
$$n = (x+1)m + x(m-1) + r \Rightarrow x = \frac{n-m-r}{2m-1}$$

$$f(n, m) \leq 2x + 2 = \frac{2n-2m-2r+2(2m-1)}{2m-1} = \frac{2n+2m-2-2r}{2m-1} \leq \frac{2n+2m-6}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1} + \frac{2m-2}{2m-1} < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$$

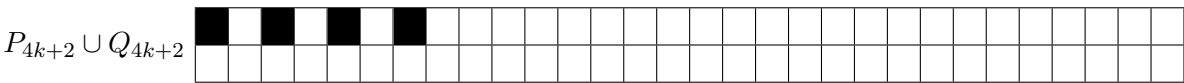
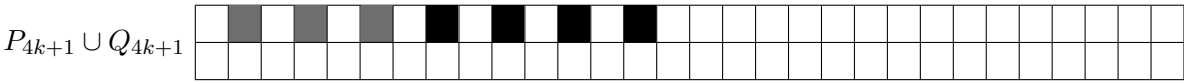
3 сл.



.....



.....

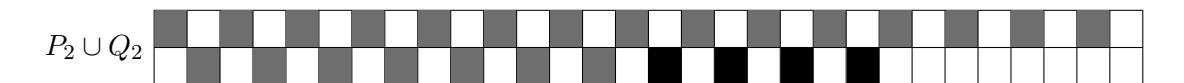


$$(m, m-1, m, \dots, m, m-1, m, m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m)$$

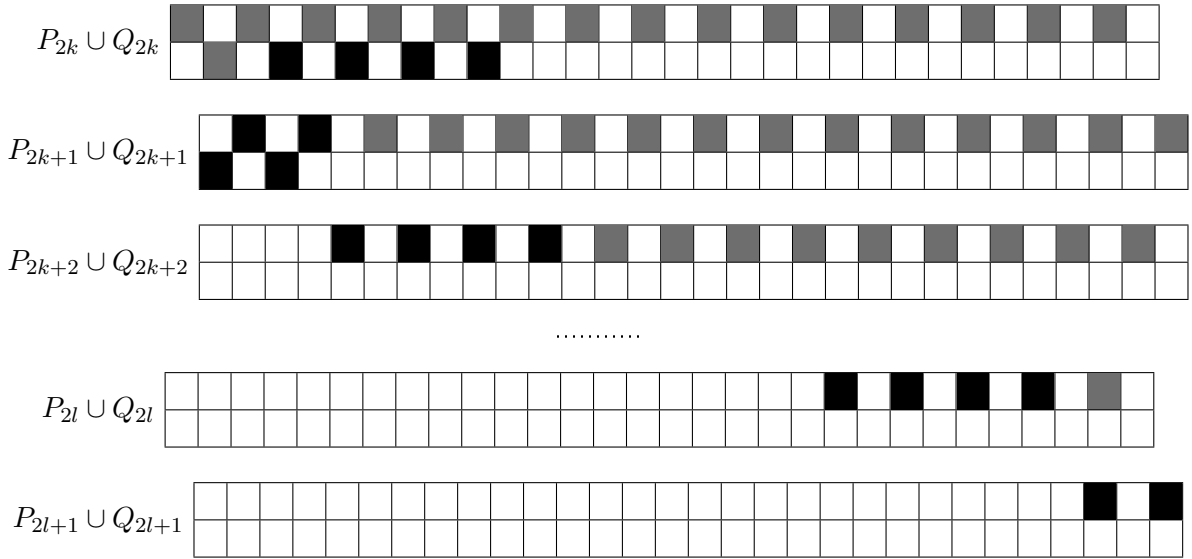
$$n = (x+2)m + x(m-1) \Rightarrow x = \frac{n-2m}{2m-1}$$

$$f(n, m) \leq 2x + 2 = \frac{2n-4m+2(2m-1)}{2m-1} = \frac{2n-2}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1} + \frac{2}{2m-1} < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$$

4.1 сл.

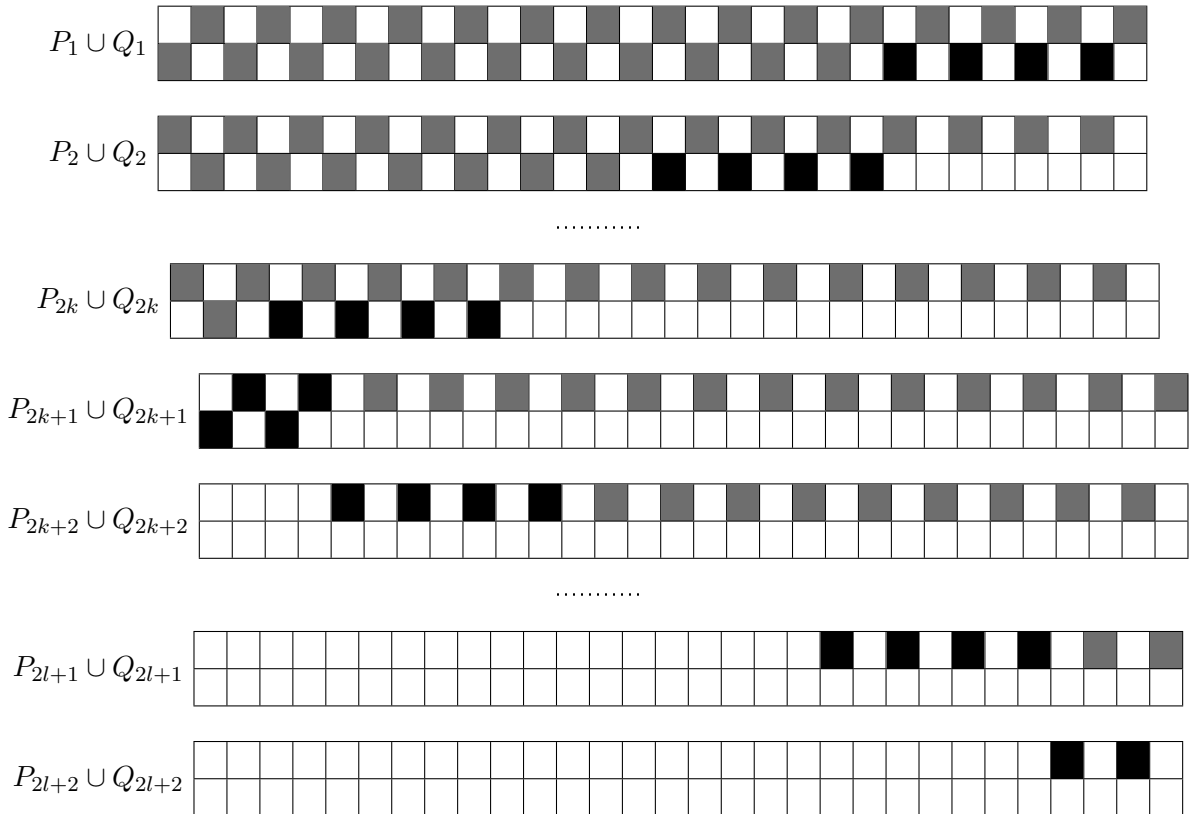


.....



$\alpha(m, P_{2l+1} \cup Q_{2l+1}) = r \quad r \geq 2$
 $(m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, r)$
 $n = xm + x(m-1) + r \Rightarrow x = \frac{n-r}{2m-1}$
 $f(n, m) \leq 2x + 1 = \frac{2n-2r+2m-1}{2m-1} \leq \frac{2n+2m-5}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1} + 1$
 Ако $r = 2 \Rightarrow n = (2m-1)x + 2 \equiv 2 \pmod{2m-1}$, което е невъзможно, защото съвпада с 1 сл.. Тоест горното неравенство е строго.
 $f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$

4.2 сл.

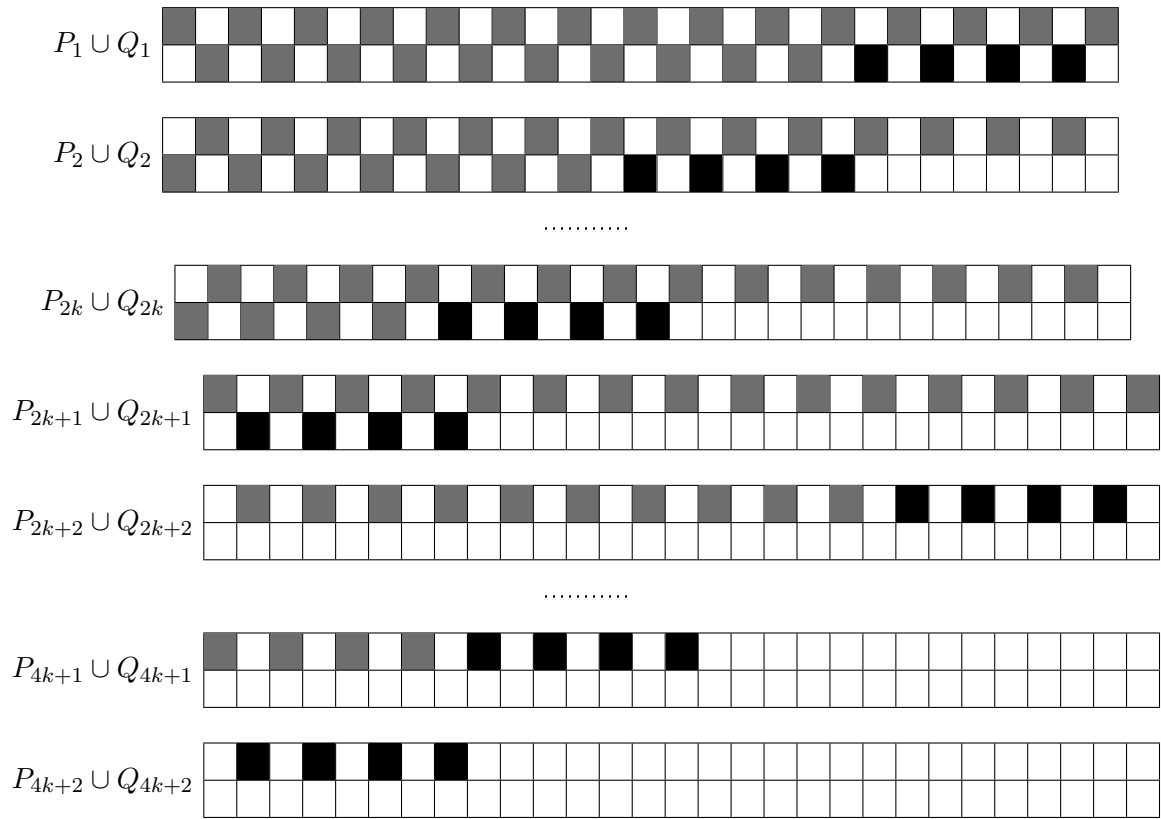


$$\begin{aligned}
& \alpha(m, P_{2l+2} \cup Q_{2l+2}) = r \quad r \geq 1 \\
& (m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m, r) \\
& n = (x+1)m + x(m-1) + r \\
& f(n, m) \leq 2x+2 = \frac{2n-2m-2r+2(2m-1)}{2m-1} = \frac{2n+2m-2r-2}{2m-1} \leq \frac{2n+2m-4}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1} + \frac{2m}{2m-1} \\
& \text{Ако } r \geq 2 \Rightarrow f(n, m) \leq \frac{2n-4}{2m-1} + \frac{2m-2}{2m-1} < \frac{2n-4}{2m-1} + 1 \\
& \text{Ако } r = 1 \Rightarrow n = (2m-1)x + m + 1 \equiv m+1 \pmod{2m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1, \text{ освен при } n \equiv m+1 \pmod{2m-1} \\
& \text{Но } f(n, m) \geq \frac{2n-4}{2m-1} \Rightarrow f(n, m) = \left\lceil \frac{2n-4}{2m-1} \right\rceil \text{ за } n\text{-четно и } n \not\equiv m+1 \pmod{2m-1}
\end{aligned}$$

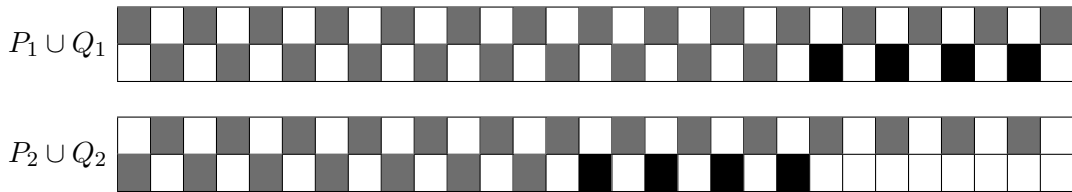
4.2.2 Ако n е нечетно

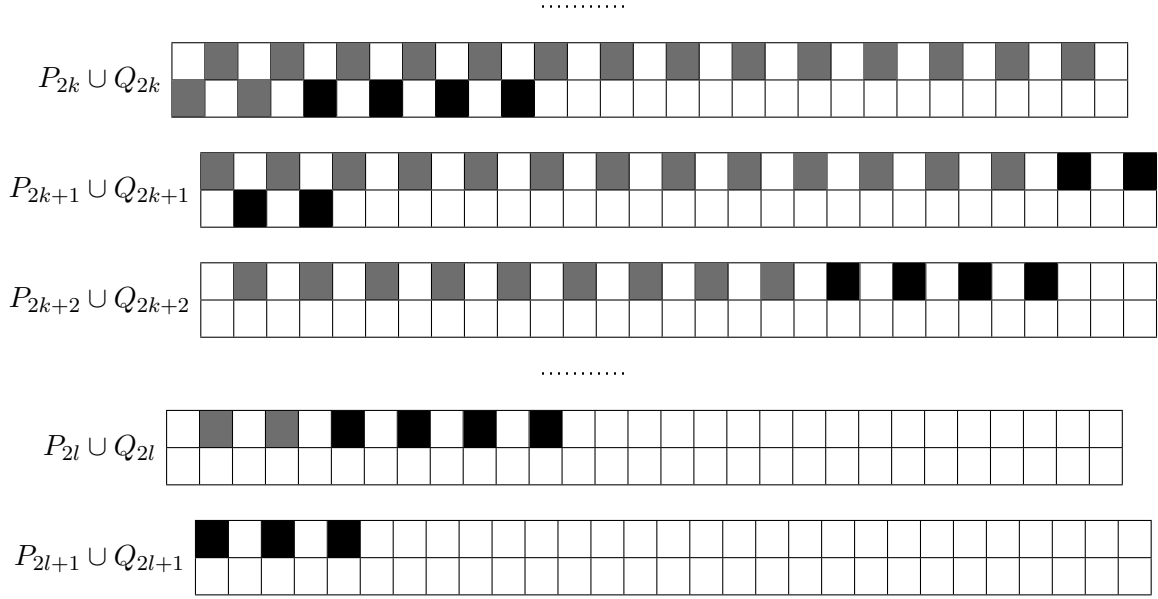
1 сл.



$$\begin{aligned}
& (m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m+1, m-1, m, \dots, m, m-1, m, m) \\
& n = m+1 + (x+1)m + x(m-1) \Rightarrow x = \frac{n-2m-1}{2m-1} \\
& f(n, m) \leq 2x+2 = \frac{2n-4m-2+2(2m-1)}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1} \\
& n \equiv (2m-1)x + 2m + 1 \equiv 2 \pmod{2m-1}
\end{aligned}$$

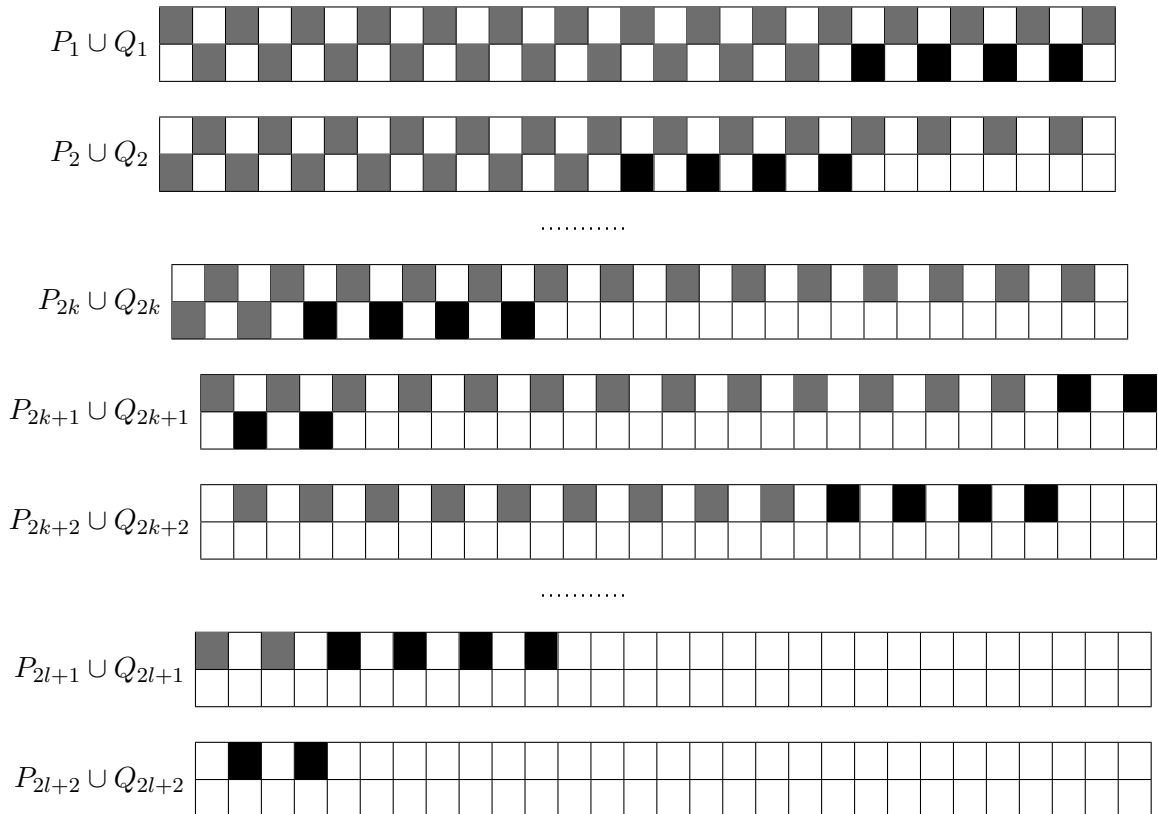
2.1 сл.





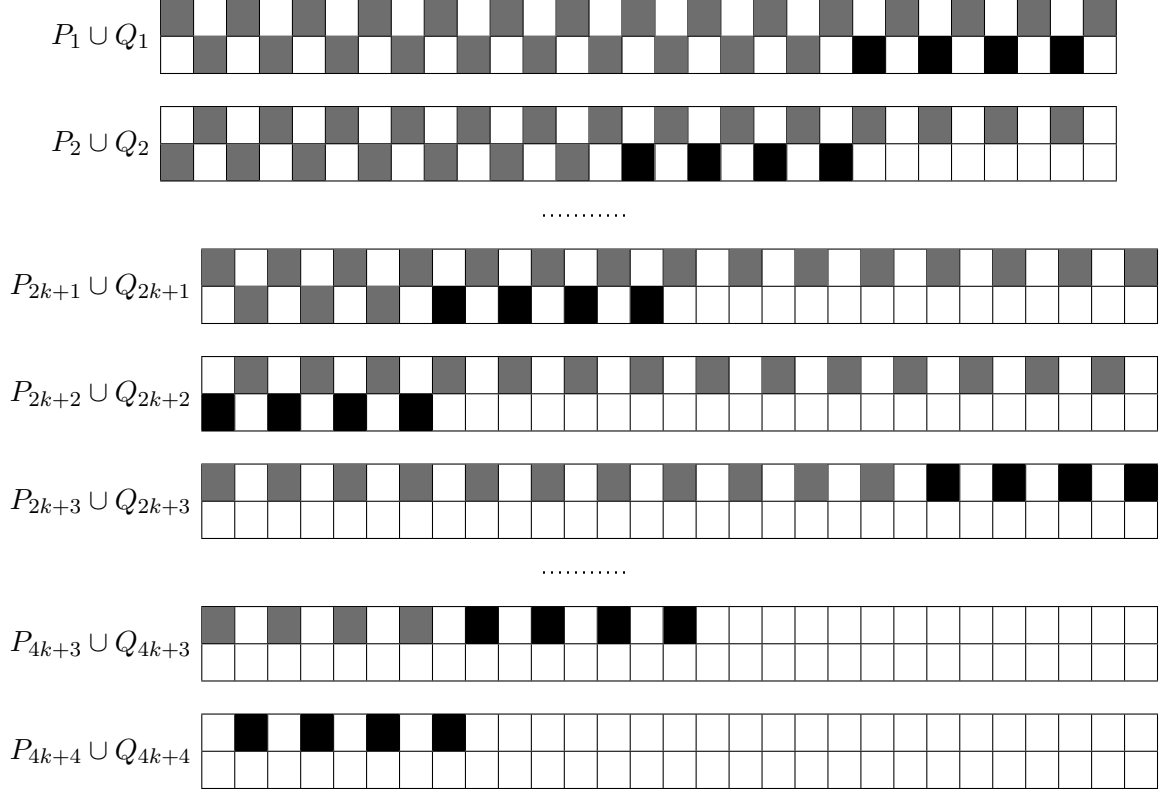
$\alpha(m, P_{2l+1} \cup Q_{2l+1}) = r \quad r \geq 2$
 $(m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, r)$
 $n = xm + x(m-1) + r \Rightarrow x = \frac{n-r}{2m-1}$
 $f(n, m) \leq 2x + 1 = \frac{2n-2r}{2m-1} + 1 \leq \frac{2n-4}{2m-1} + 1$
 Ако $r = 2 \Rightarrow n = (2m-1)x + 2 \equiv 2 \pmod{2m-1}$, което е невъзможно, защото съвпада с 1 сл. Тоест горното неравенство е строго.
 $f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$

2.2 сл.



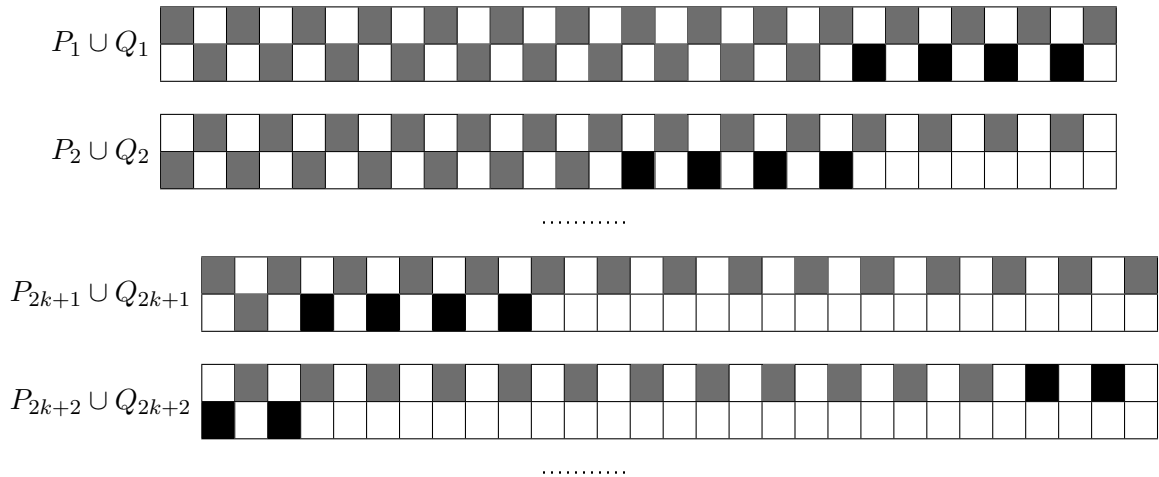
$$\begin{aligned}
& \alpha(m, P_{2l+2} \cup Q_{2l+2}) = r_1 \quad r \geq 1 \\
& (m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m, r) \\
& n = (x+1)m + x(m-1) + r \Rightarrow x = \frac{n-m-r}{2m-1} \\
& f(n, m) \leq 2x+2 = \frac{2n-2m-2r+2m-1}{2m-1} + 1 \leq \frac{2n-2-1}{2m-1} + 1 = \frac{2n-4}{2m-1} + 1 + \frac{1}{2m-1} \\
& \text{Ако } r \geq 2 \Rightarrow f(n, m) \leq \frac{2n-4}{2m-1} + \frac{2m-2}{2m-1} < \frac{2n-4}{2m-1} + 1 \\
& \text{Ако } r = 1 \Rightarrow n = (2m-1)x + m + 1 \equiv m+1 \pmod{2m-1}
\end{aligned}$$

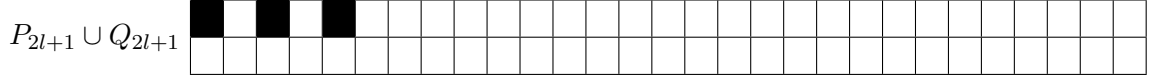
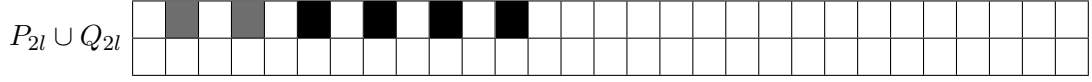
3 сл.



$$\begin{aligned}
& (m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m, m) \\
& n = (x+2)m + x(m-1) \Rightarrow x = \frac{n-2m}{2m-1} \\
& f(n, m) \leq 2x+2 = \frac{2n-4m+4m-2}{2m-1} = \frac{2n-4}{2m-1} + \frac{2}{2m-1} < \frac{2n-4}{2m-1} + 1
\end{aligned}$$

4.1 сл.





$\alpha(m, P_{2l+1} \cup Q_{2l+1}) = r \quad r \geq 2$
 $(m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, r)$
 $n = xm + x(m-1) + r \Rightarrow x = \frac{n-r}{2m-1}$
 $f(n, m) \leq 2x + 1 = \frac{2n-2r}{2m-1} + 1 \leq \frac{2n-4}{2m-1} + 1$
 Ако $r = 2 \Rightarrow n = (2m-1)x + 2 \equiv 2 \pmod{2m-1}$, което е невъзможно, защото съвпада с 1 сл.. Тоест горното неравенство е строго.
 $f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$

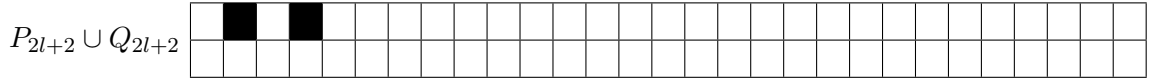
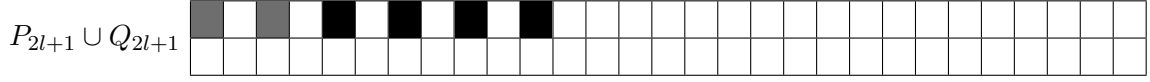
4.2 сл.



.....



.....



$\alpha(m, P_{2l+2} \cup Q_{2l+2}) = r \quad r \geq 1$
 $(m, m-1, m, m-1, \dots, m, m-1, m, r)$
 $n = (x+1)m + x(m-1) + r \Rightarrow x = \frac{n-m-r}{2m-1}$
 $f(n, m) \leq 2x + 2 = \frac{2n-2m-2r+2m-1}{2m-1} + 1 \leq \frac{2n-2-1}{2m-1} + 1 = \frac{2n-4}{2m-1} + 1 + \frac{1}{2m-1}$
 Ако $r \geq 2 \Rightarrow f(n, m) \leq \frac{2n-4}{2m-1} + \frac{2m-2}{2m-1} < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$
 Ако $r = 1 \Rightarrow n = (2m-1)x + m + 1 \equiv m + 1 \pmod{2m-1}$

$f(n, m) < \frac{2n-4}{2m-1} + 1$, освен при $n \equiv m + 1 \pmod{2m-1}$

Но $f(n, m) \geq \frac{2n-4}{2m-1} \Rightarrow f(n, m) = \left\lceil \frac{2n-4}{2m-1} \right\rceil$ за n -нечетно и $n \not\equiv m + 1 \pmod{2m-1}$

Комбинирайки твърденията при n -четно и нечетно получаваме, че:

$$f(n, m) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n-4}{2m-1} \right\rceil & \text{при } n \not\equiv m + 1 \pmod{2m-1} \\ \frac{2n-3}{2m-1} \text{ или } \frac{2n-3}{2m-1} + 1 & \text{при } n \equiv m + 1 \pmod{2m-1} \end{cases} \quad (2)$$

5 Стойности на $f(n, m)$ за $n \leq 4m$ и $m > 1$

Ако $1 \leq n \leq m$, очевидно $f(n, m) = 1$

Ако $m + 1 \leq n \leq 2m + 1 \Rightarrow f(n, m) = 2$

$f(n, m) \geq 2$, защото със сигурност ще остане поне 1 квадратче, в което може да бъде принцесата в края на първия ден. От Теорема 3.1., ще е достатъчно да докажем $f(2m + 1, m) = 2$. Нека позициите на двете страти са $P \equiv T_1$ и $Q \equiv T_2$, като $|P| = m + 1$ и $|Q| = m$.

$\alpha(m, P \cup Q) \geq \alpha(0, P) + \alpha(m, Q) = m + 1 \Rightarrow |P' \cup Q'| \leq m \Rightarrow P'' \equiv Q'' \equiv T_4$, тоест $f(2m + 1, m) \leq 2$

Ако $2m + 2 \leq n \leq 3m - 1 \Rightarrow f(n, m) = 3$

От Теорема 3.1., за да изразим долна граница ще е достатъчно да проверим случая за $n = 2m + 2$.

От Лема 4.1. $\Rightarrow \alpha(m, P \cup Q) \leq m$ и $\alpha(m, P' \cup Q') \leq m \Rightarrow |P'' \cup Q''| \geq 2 \Rightarrow f(n, m) \geq 3$

От Теорема 3.1., за да изразим горна граница ще е достатъчно да проверим случая за $n = 3m - 1$

1 сл. Ако $3m - 1$ е четно $\Rightarrow m = 2q + 1 \Rightarrow n = 6q + 2$. Нека двете страти са в позиции $P \equiv Q \equiv T_1$.

Нека $p = 0$, $q = 2q + 1$; $p' = q + 1$, $q' = q$; $p'' = 2q + 1$, $q'' = 0$.

В този случай $P' \equiv T_1$, а $Q' \equiv T_2$ и $|Q'| = q \Rightarrow P'' \equiv T_2$ и $|P''| = 2q$, а $Q'' \equiv T_3 \Rightarrow P''' \equiv Q''' \equiv T_3$

2 сл. Ако $3m - 1$ е нечетно $\Rightarrow m = 2q \Rightarrow n = 6q - 1$. Нека двете страти са в позиции $P \equiv T_1$, а $Q \equiv T_2$

и $|Q| = 3q - 1$. Нека $p = 0$, $q = 2q$; $p' = q$, $q' = q$; $p'' = 2q$, $q'' = 0$.

В този случай $P' \equiv T_2$ и $|P'| = 3q - 1$, а $Q' \equiv T_3$ и $|Q'| = q \Rightarrow P'' \equiv T_3$ и $|P''| = 2q$, а $Q'' \equiv T_4 \Rightarrow P''' \equiv Q''' \equiv T_4$

Ако $n = 3m$ ще докажем, че:

$$f(n, m) = \begin{cases} 3, & \text{ако } m \text{ е четно} \\ 4, & \text{ако } m \text{ е нечетно} \end{cases} \quad (3)$$

За $m = 2k$ (четно) ще е достатъчно да покажем реализация. Нека позициите на стратите са

$P \equiv Q \equiv T_1$. Нека $p = 0$, $q = 2k$; $p' = k$, $q' = k$; $p'' = 2k$, $q'' = 0$.

В този случай $P' \equiv T_1$, а $Q' \equiv T_2$ и $|Q'| = m \Rightarrow P'' \equiv T_2$ и $|P''| = 2q$, а $Q'' \equiv T_3 \Rightarrow P''' \equiv Q''' \equiv T_4$

За $m = 2k + 1$ (нечетно) ще трябва да покажем реализация и да докажем, че $f(n, m) = 3$ е невъзможно.

Първо ще покажем реализацията, нека позициите на стратите са $P \equiv T_1$ и $Q \equiv T_2$, като $|Q| = 3k + 1$.

Нека $p = 0$, $q = 2k + 1$; $p' = k$, $q' = k + 1$; $p'' = 2k + 1$, $q'' = 0$; $p''' = 1$, $q''' = 0$.

В този случай $P' \equiv T_2$ и $|P'| = 3k + 1$, а $Q' \equiv T_3$ и $|Q'| = k + 1 \Rightarrow P'' \equiv T_3$ и $|P''| = 2k + 2$, а $Q'' \equiv T_4 \Rightarrow P''' \equiv T_2$ и $|P'''| = 1$, а $Q''' \equiv T_4 \Rightarrow P'''' \equiv Q'''' \equiv T_4$

Да допуснем, че е възможно $f(n, m) = 3$

1 сл. В реда на α -ите присъства числото $m + 1$. От расъжденията за α равно на $m + 1$ в 4.1.2 следва, че ако това се случи то $P_i \equiv T_1$, а $Q_i \equiv T_2$, като при това $|Q_i| = 2k + 1$. За да се стигне до тази ситуация ни трябва поне един ход. Също така знаем, че $P_{i+1} \equiv T_2$, като $|P_{i+1}| = 3k + 1$, $Q_{i+1} \equiv T_4$. От тази позиция ни трябва поне 2 хода, за да стигнем до $P_k \equiv Q_k \equiv T_4$, защото не можем да елиминираме $3k + 1$ квадратчета на един ход. Тоест общо ще ни трябва поне 4 хода, с което стигаме до противоречие.

2 сл. В реда на α -ите не присъства числото $m + 1$, тоест реда трябва да изглежда така: (m, m, m)

Нека позициите на стратите са $P \equiv T_1$ и $Q \equiv T_2$.

$\alpha(m, P \cup Q) = \alpha(p, P) + \alpha(q, Q) \leq p + 1 + q - 1 = m$, като равенство се достига единствено при $p = 0$ и $q = m \Rightarrow P' \equiv T_2$, като $|P'| = 3m + 1$, а $Q' \equiv T_3 \Rightarrow \alpha(m, P' \cup Q') = \alpha(p', P') + \alpha(q', Q') \leq p' - 1 + q' = m - 1$, с което стигаме до противоречие.

Ако $3m + 1 \leq n \leq 4m \Rightarrow f(n, m) = 4$

От Теорема 3.1., ще е достатъчно да докажем, че $f(3m + 1, m) > 3$ и да покажем реализация за $f(4m, m)$. Първо ще докажем, че $f(3m + 1, m) \neq 3$. Допускаме обратното:

1 сл. Ако m е нечетно $\Rightarrow n$ е четно

Прилагайки Лема 4.1. три пъти последователно стигаме до извода, че $|P''' \cup Q'''| \geq 1$, тоест ще ни трябва поне 4 дена, с което стигаме до противоречие.

2 сл. Ако $m = 2k$ (четно) $\Rightarrow n$ е нечетно

За да се случи $f(3m + 1, m) = 3$, записвайки реда на α -ите, сред тях трябва да има два пъти m и веднъж $m + 1$. Нека позициите на двете страти са $P \equiv T_1$ и $Q \equiv T_2$, като $|Q| = 3k$
 $\alpha(m, P \cup Q) = \alpha(p, P) + \alpha(q, Q) \leq p + 1 + q - 1 = m$, като равенство се достига $p = 0$ и $q = m \Rightarrow P' \equiv T_2$, като $|P'| = 3m + 1$, а $Q' \equiv T_3 \Rightarrow \alpha(m, P' \cup Q') = \alpha(p', P') + \alpha(q', Q') \leq p' - 1 + q' = m - 1$, с което стигаме до противоречие.

Сега ще покажем, реализация за $n = 4m$.

Нека $p = 0$, $q = m$; $p' = 0$, $q' = m$; $p'' = m$, $q'' = 0$; $p''' = m$, $q''' = 0$.

В този случай $P' \equiv T_1$, а $Q' \equiv T_2$ и $|Q'| = m \Rightarrow P'' \equiv T_1$, а $Q'' \equiv T_3 \Rightarrow P''' \equiv T_2$ и $|P'''| = m' \Rightarrow P'''' \equiv Q'''' \equiv T_3$.

$$f(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{при } 1 \leq n \leq m \\ 2, & \text{при } m + 1 \leq n \leq 2m + 1 \\ 3, & \text{при } 2m + 2 \leq n \leq 3m - 1 \\ 4, & \text{при } 3m + 1 \leq n \leq 4m \end{cases} \quad \text{и} \quad f(3m, m) = \begin{cases} 3, & \text{ако } m \text{ е четно} \\ 4, & \text{ако } m \text{ е нечетно} \end{cases} \quad (4)$$

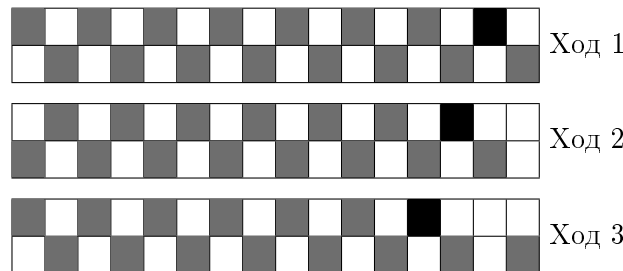
6 Стойности на $f(n, 1)$

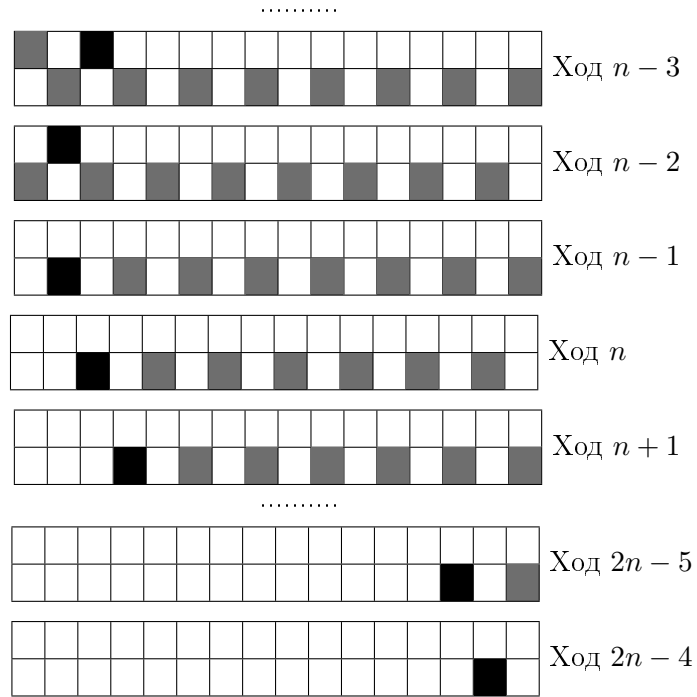
$$\text{В тази секция ще докажем, че } f(n, 1) = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \\ 2, & \text{ако } n = 2 \\ 2n - 4, & \text{ако } n \geq 3 \end{cases}$$

При $n = 1$ и $n = 2$ доказателството е очевидно, затова ще се насочим към случая $n \geq 3$

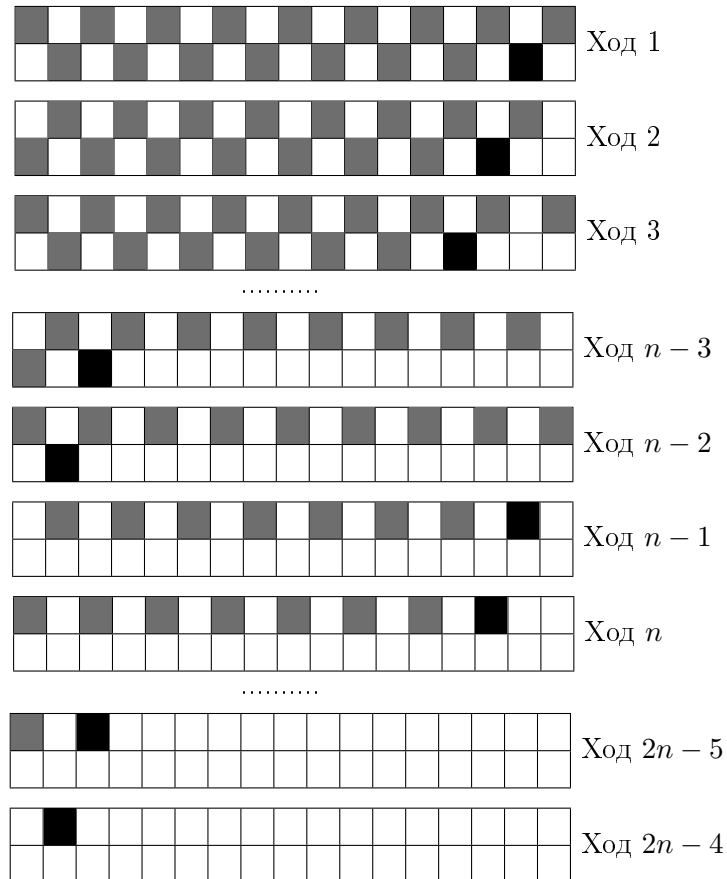
Долната граница, която получихме в секция 4.1 важи и тук, защото никъде не сме използвали, че $m > 1$. Тоест ни е известно, че $f(n, 1) \geq \frac{2n-4}{2m-1} = 2n - 4$. За да завършим доказателството ни трябва реализация с $2n - 4$ хода.

6.1 Ако n е четно





6.2 Ако n е нечетно



Комбинирайки расъжденията в секция 4.1 с тези реализации, получаваме, че:

$$f(n, m) = 2n - 4 \text{ при } n \geq 3$$

7 Връзка между $f(n, m)$ и $f(n, 1)$

Замествайки $2n - 4$ с $f(n, 1)$ получаваме:

$$f(n, m) = \begin{cases} \left\lceil \frac{f(n, 1)}{2m-1} \right\rceil, & \text{при } n \not\equiv m+1 \pmod{2m-1} \\ \frac{f(n, 1)+1}{2m-1} \text{ или } \frac{f(n, 1)+1}{2m-1} + 1, & \text{при } n \equiv m+1 \pmod{2m-1} \end{cases}$$

8 Заключение и бъдещо развитие

В този проект ние изследвахме по-задълбочено функцията f . Досега бяха извесни резултати само за $f(n, 1)$, а ние успяхме да открием стойността на $f(n, m)$.

В бъдещи статии по тази тема, ще се опитаме да изчистим случая, $n \equiv m+1 \pmod{2m-1}$. Също така бихме искали да изследваме, кога съществува стратегия за откриване на принцесата в по-сложни графи и да намерим минималния граф дърво, при който не съществува стратегия за намиране на принцесата за $m = 2$. Има и вероятност да разгледаме насочени графи.

Литература

- [1] Емил Колев Николай Белухов, Search for a moving target in a graph. Fifteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, стр. 47-52, 2016 г.
- [2] Gary Antonick, The princess problem, Wordplay. The crossword Blog of the New York Times, 2014 г.
- [3] Асел Исмолдаева, Как да намерим Принцеса или Търсене на движеща се цел в граф. Седемнадесета ученическа конференция, 13-15 януари 2017 г.